第 2 章　複素数と方程式

3　解と係数の関係

100 『解と係数の関係』に当てはめるだけ.

▷Point◁(解と係数の関係)

$ax^2+bx+c=0$ の解を α, β とするとき,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

が成立する.

とても重要な関係なので, しっかりと覚えておこう.

101 『解と係数の関係』より, $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ の値はすぐに分かります. (1)〜(5) の式はすべて対称式です. 対称式とは文字を入れ換えても式の形が変わらない式のことで, 対称式は, $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ を用いて表現することができます. 73 も参照のこと.

参考 (3) の $(\alpha-\beta)^2$ について. これは前章の『判別式』と深い関わりがあります.
なぜなら, $ax^2+bx+c=0$ の解を α, β とするとき, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ なので,

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}\\&=\frac{b^2-4ac}{a^2}\end{aligned}$$

となります. 最後の結果を見てください. 分子部分が判別式 D になっているではありませんか！つまり, 分母 $a^2>0$ なので, 判別式 D の符号と $(\alpha-\beta)^2$ の符号が完全に一致することになります. したがって,
$D>0\iff(\alpha-\beta)^2>0$
$\therefore$ α と β は異なる 2 つの実数.
$D=0\iff(\alpha-\beta)^2=0\iff\alpha=\beta$
$\therefore$ 実数解は 1 個だけ.
$D<0\iff(\alpha-\beta)^2<0$ これは矛盾
$\therefore$ 実数解なし (虚数解).
このように完全に整合性がとれていることがわかります.

102 具体的に解を求めて計算してもできますが, どうせなら『解と係数の関係』を利用して, かっこよくサクッとやりましょう. ポイントは自分で解を設定することです. つまり,
(1) は, 2 つの解を α, 2α.
(2) は, 2 つの解を 2α, 3α.
(3) は, 2 つの解を α, $\alpha-2$.
と設定します. このように解を設定して, 直接, 解を求めて扱うのではなく, 和と積に注目して間接的に処理していることを意識しよう. これが数学的な考え方なのです.

103 う〜ん, 別にどうでもいいです. 次のことが分かってればそれで構いません.

▷Point◁(解と因数分解の関係)

$ax^2+bx+c=0$ の解を α, β とするとき,

$$\begin{aligned}&ax^2+bx+c\\&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=2(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)\\&=a(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

と因数分解できる.

2 次方程式は複素数内に必ず解をもつので, このことから, 2 次方程式が複素数を用いれば必ず因数分解できることが保証されるのです.
つまり, 例えば (5) は 2 次方程式 $3x^2+5x+1=0$ を解くと, $x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$ なので,

$$\begin{aligned}&3x^2+5x+1\\&=3\left(x-\frac{-5+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{13}}{6}\right)\end{aligned}$$

というふうに因数分解できます. ただそれだけのことです.

注 この問題は, 数学的には大変重要なことを示唆しています. 今回は 2 次方程式での話ですが, 一般の n 次方程式にも拡張されるのです. つまり,「多項式が複素数の範囲内で 1 次式に因数分解できる」言い換えれると「n 次方程式が複素数内で必ず解をもつ」ことを意味しており, これは『代数学の基本

定理』とよばれる数学上，極めて重要な定理です．

104 2 次方程式から解を求めることはこれまで何度もやってきていますが，今度は逆に，解を使って，元の 2 次方程式を復元してくれ，というもの．実際問題，そのような事態はほとんど起こらないんですけどね・・・・

ポイントは，解の和と積に注目することです．重要なことなのでもう一度紹介しますが，

▷Point◁(解と因数分解の関係)

$ax^2+bx+c=0$ の解を α，β とするとき，

$$\begin{aligned}&ax^2+bx+c\\=&a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\=&2(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)\cdots(※)\\=&a(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

と因数分解できる．

(※) 式のところに注目すると，解の和と積をもちいて，もとの式が復元できることがわかります．

なお，x^2 の係数 a にあまり意味はありません．方程式は "$=0$" の形なので，両辺を a で割ったり，かけたり、自由に出来るからです．つまり，

▷Point◁(解と方程式の関係)

α，β を解にもつ 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

である．

注 『解と係数の関係』が，「解を係数で表す」ことであるのに対し，『解と方程式の関係』は，「係数を解で表す」ことになっていることを意識しよう．

105 104 同様．和と積からもとの 2 次方程式が復元できます．

106 う〜ん，いろんな考え方がありますが，せっかくなので，『解と係数の関係』を利用してみましょう．(1) は『解と係数の関係』より，

$$\alpha+\beta=-5,\qquad \alpha\beta=\frac{p}{2}$$

$\alpha=\dfrac{1}{2}$ より，β や p の値が決定できます．(2) も同様です．

なお，『解と係数の関係』を用いなくても，もとの 2 次方程式に解を代入すれば ((1) なら $x=\dfrac{1}{2}$ を，(2) なら $x=1+\sqrt{3}i$ を代入すれば)，p を求めることができ，必然的に他の解も分かります．

107 次の有名事実は知っておいたほうが良いでしょう．

▷Point◁

実数係数の方程式が複素数 $p+qi$ を解にもてば，その共役な複素数 $p-qi$ も解にもつ．

このことは 2 次方程式の場合だとほとんど明らかです．解の公式より，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の形を見れば，解の 2 つが共役な複素数になっているのは明らかです．

なお，一般の n 次方程式の場合の証明は今のところ保留．

注 実数係数というのが重要です．実数係数でなければ，こんなことは成り立ちません．したがって，この問題の場合，$2+3i$ を解にもてば $2-3i$ も解にもつので，これらの和と積を考えることで，解と係数の関係より，a と b を決定することができます．

108 これは大切な問題です．

ポイントは，解の和と積が分かれば，もとの 2 次方程式を復元できる，ということです (104 や 105 参照)．

つまり，(1) の場合，$\alpha+2$，$\beta+2$ を解にもつ方程式を作るのであれば，それらの和 $(\alpha+2)+(\beta+2)$ と積 $(\alpha+2)(\beta+2)$ を計算すればよいのです．α と β は $x^2-2x+7=0$ の解であることが分かっているので，『解と係数の関係』より，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値は分かりますね．

$\boxed{109}$ 小数部分の求め方なんてありません．実際に数値計算して自分で調べるだけです．今回の場合，$x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ で，$\sqrt{5}=2.236\ldots$ なので，代入して数値計算すれば，整数部分がわかるでしょう．ということは，小数部分を表すこともできますよね？それらを解にもつ方程式を作ります．このあたりの手法は $\boxed{108}$ と全く同じ．

$\boxed{110}$ ようするに，$x^2+ax+b=0$ の 2 つの解を α，β とすると，$x^2+bx+a-6=0$ の 2 つの解が $\alpha+1$，$\beta+1$ になるというだけです．それぞれの 2 次方程式で『解と係数の関係』を考えればよいです．くれぐれも，実際に解を求めて調べるという手法からはもう卒業しよう．

$\boxed{111}$ $\boxed{110}$ と同様．ようするに，$x^2-px+2=0$ の 2 つの解を α,β とすると，$x^2-5x+q=0$ の 2 つの解が $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ になるというだけです．それぞれの 2 次方程式で『解と係数の関係』を考えればよいです．

$\boxed{112}$ う～ん，A 君も B 君もしっかりしてほしいですよね．
つまり，A 君が解いた方程式は

$$a(x-(-3+\sqrt{14}))(x-(-3-\sqrt{14}))=0$$

で，これは定数項がミスってる．ということは 1 次の項は正しい．
B 君が解いた方程式は

$$a(x-1)(x-5)=0$$

で，これは 1 次の項がミスってる．ということは定数項が正しい．
以上のことから，正しい方程式を復元できないでしょうか？

$\boxed{113}$ う～ん，これも別にどうでもいい問題です．ただ「いろんなレベルで因数分解できるで」ってことを確認するだけの問題．次の様子が理解できればそれでＯＫ牧場．

$\boxed{x^4+x^2-20 \text{ の因数分解}}$

$$\begin{aligned}&x^4+x^2-20\\=&(x^2-5)(x^2+4)\ \cdots①\\=&(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x^2+4)\ \cdots②\\=&(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+2i)(x-2i)\ \cdots③\end{aligned}$$

① 有理数レベルでストップ！（通常はココまで）
② 実数レベルでストップ！
③ 複素数レベルでストップ！
注 複素数レベルで，完全に 1 次式の積に分解できていることを意識してください．これが『代数学の基本定理』です．$\boxed{103}$ 参照のこと．

$\boxed{114}$ 『解と係数の関係』の章の問題ですが，『解と係数の関係』を使っちゃダメです．かえって間違えやすくなります．数学 I 的に 2 次関数のグラフを利用して解いてください．
4STEP 数学 I の $\boxed{215}$ ～ $\boxed{217}$ の問題を再チェックしといてください．

$\boxed{115}$ $\boxed{114}$ 同様に，これも『解と係数の関係』を使っちゃダメです．やっぱり 2 次関数のグラフを考えて解いてください．その方が絶対に安全です．

$\boxed{116}$ 正直にやるなら，

$$(x+1)(x-1)+(x-1)(x-2)+(x-2)(x+1)=0$$

の解が α と β だから，式を展開して，整理すれば，『解と係数の関係』より $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値を求めることができます．となれば，

$$\frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}+\frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}+\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

も各項の分母が，$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ で表されるので，各項ごとに代入して計算すれば，この値を求めることができます．
とまあ，普通にやってできなくもないんですが，せっかくなので工夫してかっこよく解きたいところ．上の例題 12 がヒントになっています．
例題 12 の解答をしっかり読んで考えてください．

これはパズル的なお楽しみ問題です (数学的に奥深い問題ではありません).「むつかしいなあ」ではなく「へぇ〜おもろいなあ〜」「うまいことなってんなあ〜」と感心感動する気持ちをもってほしいものです.
数学は感情的な学問だからです.

117 う〜ん，普通に因数分解できるんですけど・・・・これはまあ 119 を解かせるための準備体操みたいな問題ですね.
103 が x だけの 2 次式の因数分解なのに対し，今回は x と y の 2 次式の因数分解なわけですが根本的な考え方は同じです．つまり，x の 2 次方程式とみて解の公式で解を求めます．その 2 つの解を利用して因数分解できるのです．(103 参照)
(1) の場合，$x^2-(y+1)x+2y-2=0$ の解を α，β とすれば，

$$x^2-(y+1)x+2y-2=(x-\alpha)(x-\beta)$$

となります．この場合，α と β は y の式なので，これが答えです.
まあ，別に今はやらなくても構わないと思います (ていうか永遠にやらなくてもいい).
数学 I の 4STEP の 36 を見といてください.

118 単なる連立方程式なので，テキトーに代入しても解けますが，ちょっと工夫してみましょう.
まずは，これらの連立方程式の形を見て，何か感じることはないでしょうか？それは「対称式やん！」って思えるかどうか．そうとなれば話は簡単で，「対称式は和と積で表せる」ということから，$x+y=A$，$xy=B$ とでも置き換えしてみるのです.
(1) の場合，

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x+y+xy=-7 \end{cases} \iff \begin{cases} A=3 \\ A+B=-7 \end{cases}$$

(2) の場合，

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases} \iff \begin{cases} A^2-2B=13 \\ B=6 \end{cases}$$

となるので，A と B が簡単に求まると思います．A と B が分かれば x と y も簡単に求められます． 105 を参照のこと.

119 この章の最後を飾る問題がこれですか。。。。
ちょっと不満.
117 同様に，x の 2 次式とみなすと

$$x^2+(y-1)x-6y^2+7y+k$$

なので，

$$x^2+(y-1)x-6y^2+7y+k=0 \quad \cdots (※)$$

の 2 つの解 α，β を用いて，

$$x^2+(y-1)x-6y^2+7y+k=(x-\alpha)(x-\beta)$$

となるはず．α と β は y の式なので，まあこれで因数分解終了なわけですが，問題文では「x と y の 1 次式の積」になるように指定されています．ということは，α と β が y の 1 次式にならねばなりません.
α と β は (※) から解の公式で求めたので，当然ルートを含んでいます．これが y の 1 次式になるには，このルートがうまいことハズレなければなりません．ということは，ルートの内部がどのようになればよいのでしょうか・・・・・
まあ，いまは別にやらんでよろしい.