第 2 章　複素数と方程式

4　剰余の定理と因数定理

$\boxed{120}$ 『剰余定理』に当てはめるだけ.

▷Point◁(剰余定理)

> 整式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割った余りは，$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ である.

この定理はとても重要です．必ず自分で証明できるようにしておこう.

したがって，例えば，(1) は $x=-2$ を，(4) は $x=\dfrac{2}{3}$ をそれぞれもとの式に代入すれば余りが得られます.

もう一度言いますが，なぜ，この方法で余りが求められるのか自分で証明しておくこと.

$\boxed{121}$ 引き続き『剰余定理』を使います．今度は余りがわかっているときに，もとの整式を決定せよということですが，どうってことありません.

例えば (1) の場合，もとの整式に $x=-3$ を代入すれば 1 になるわけです．簡単ですよね.

$\boxed{122}$ 今度は『因数定理』．まあ『剰余定理』の拡大解釈と言ったほうが適切でしょうか．つまり，

$$\begin{aligned}&P(x) \text{ が } x-\alpha \text{ を因数にもつ}\\ \Longleftrightarrow\ &P(x) \text{ が } x-\alpha \text{ で割り切れる}\\ \Longleftrightarrow\ &P(x) \text{ が } x-\alpha \text{ で割った余りが } 0\\ \Longleftrightarrow\ &P(\alpha)=0\end{aligned}$$

ようするに，$P(x)$ に $x=\alpha$ を代入して 0 になれば，$P(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつ，ということです.

例えば，(1) は，$x=1$ を代入すると 0 になるので，$x-1$ を因数にもちます．他にもあるかもしれません．こればかりは自分でイロイロ代入していちいち検証していくしかありません.

$\boxed{123}$ 次の章で学習する高次方程式の解法につながる重要な問題．これまで何度もやったように，$x=\alpha$ を入れて 0 になれば，その式は $x-\alpha$ で割り切れる，すなわち，$x-\alpha$ で因数分解できることを意味します．よって，$\boxed{122}$ のように，テキトーに代入して 0 になる数を見つければよいのです.

例えば (2) の場合，$x=2$ を代入すると 0 になることがわかるので，$x-2$ でくくりだせることが分かります．つまり，

$$x^3+4x^2-3x-18=(x-2)(\quad ? \quad)$$

次に，(　?　) 部分の求め方ですが，

$$(x^3+4x^2-3x-18)\div(x-2)$$

を筆算で計算しても良いですし，組立除法を利用しても良いでしょう.

$\boxed{124}$ (1) について．$x-1$ で割り切れるということは，$x-1$ で割った余りが 0 であるということです．つまり，もとの式に $x=1$ を代入すれば 0 になるので，このことから定数 a を求めることができます．(2)(3) も同様.

$\boxed{125}$ 「有理数の範囲で因数分解」という言い方が仰々しいですが，フツーに因数分解すればよいでしょう．ただし，いずれも最高次数が 1 ではないので，最初に代入する数字がちょっと悩むかもしれません．「代入する数字は整数とは限らない」とだけ申しておきましょう．ということは・・・分数を代入せねばなりません．例えば，(1) の場合 $-\dfrac{1}{2}$ を代入すると 0 になることが分かります．ということは $x+\dfrac{1}{2}$ でくくりだせます．つまり，

$$4x^3+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)(\quad ? \quad)$$

次に，(　?　) 部分の求め方ですが，$\boxed{123}$ と同様に，組立除法を利用してもよいし，筆算による割り算をしてもかまいません．なお，筆算による割り算を行う場合は，

$$4x^3+x+1=(2x+1)(\quad ? \quad)$$

と解釈して，

$$(4x^3+x+1)\div(2x+1)$$

を実行するとよいでしょう.

そろそろ，最初に代入する数字のヒミツを考える必要がありそうですね．$\boxed{123}$ では，テ

キトーに代入して見つけたかもしれませんが（だって，たいてい ±1 か ±2 あたりで決まるからね），ホントはちゃんとした理由があるのです．それは・・・もう少しあとで説明します．まずは，自分でイロイロやってみてください．

126 4 次方程式になっても因数分解の手法は 123，125 と同じです．ここでも，最初に代入す数字は ±1 か ±2 あたりで決まるみたいですね（笑）

127 ここからしばらく整式の割り算の問題が続きます．次の有名事実は知っておいたほうが良いでしょう．

▷Point◁

$P(x)$ を $A(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると

$$P(x)=A(x)Q(x)+R(x)$$

と表記できる．
ただし，余り $R(x)$ の次数は，割る整式 $A(x)$ の次数よりも小さい．

余りの次数が割る整式の次数よりも小さくなるのは，なんとなく分かるでしょう．数字の割り算と同じ感覚ですね．余りが割る数よりも大きいなら，もっとさらに割れてしまうからね．
さて，このタイプの問題では次の手法がポイントとなります．

▷Point◁

① 余りの次数に注意して正しく立式する．
② 商を消去するような x の値を両辺のすべての x のところに代入する．

まずは，具体例でなれよう．

まずは正しく立式します．まず，x^2-1 で割り切れるということは余りが 0 ということだから，

$$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-1)Q_1(x)$$

つまり

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+1)(x-1)Q_1(x)\cdots①$$

さらに，

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-2)Q_2(x)+3\cdots②$$

以上の 2 つの関係式では商を区別していることに注意しよう．違うもので割ってるんだから商も違うはずです．
① で，商を消去するには $x=\pm1$ を代入すればよいので，
$x=1$ を代入 $\longrightarrow$ $1+a+b+c=0$
$x=-1$ を代入 $\longrightarrow$ $-1+a-b+c=0$
② で，商を消去するには $x=2$ を代入すればよいので，
$x=2$ を代入 $\longrightarrow$ $8+4a+2b+c=3$
以上，3 つの連立方程式を解けば，a，b，c が求まります．

128 これは大切な問題です．まずは余りの次数に注意して正しく立式しよう．

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+3x-1\cdots①$$

次に，$x-1$，$x+2$ で割った余りは，割る式が 1 次式なので余りは定数です．つまり，

$$P(x)=(x-1)Q_1(x)+a\cdots②$$
$$P(x)=(x+2)Q_2(x)+b\cdots③$$

とおけます．
① に $x=1$ を代入すると，$P(1)=2$．$x=-2$ を代入すると，$P(-2)=-7$．
② に $x=1$ を代入すると，$P(1)=a$．③ に $x=-2$ を代入すると，$P(-2)=b$．
よって，$a=2$，$b=-7$ となります．

129 前問と同様，余りの次数に注意して正しく立式します．

$$P(x)=(x-2)Q_1(x)+5\cdots①$$
$$P(x)=(x-3)Q_2(x)+9\cdots②$$

次に，$(x-2)(x-3)$ で割った余りは，割る式が 2 次式なので余りは 1 次式以下です．つまり，

$$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b\cdots③$$

① より，$P(2)=5$．② より，$P(3)=9$．
③ に $x=2$ を代入すると，$P(2)=2a+b$．
$x=3$ を代入すると，$P(3)=3a+b$．
したがって，

$$2a+b=5, \quad 3a+b=9$$

となるので，この連立方程式を解けば終わり．

130 前問と同様，余りの次数に注意して正しく立式します．

$$P(x)=(x^2-3x+2)Q_1(x)-x+4 \cdots ①$$
$$P(x)=(x^2-4x+3)Q_2(x)+3x \cdots ②$$

次に，x^2-5x+6 で割った余りは，割る式が 2 次式なので余りは 1 次式以下です．つまり，

$$P(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b \cdots ③$$

このままでは，x に何を代入すればよいのかわからないので，因数分解してみます．

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)-x+4 \cdots ①$$
$$P(x)=(x-1)(x-3)Q_2(x)+3x \cdots ②$$
$$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b \cdots ③$$

もう何を代入すればよいかわかりますね．
① より，$P(2)=-2$．② より，$P(3)=9$．
③ に $x=2$ を代入すると，$P(2)=2a+b$．
$x=3$ を代入すると，$P(3)=3a+b$．
したがって，

$$2a+b=-2, \quad 3a+b=9$$

となるので，この連立方程式を解けば終わり．

$\boxed{127}$ 〜 $\boxed{130}$ の 4 問は，式さえ立ててしまえば，あとは単なる数や式の組合せに過ぎずません．

131 いつも通り，余りの次数に注意して正しく立式しよう．今回の場合，2 次式で割るので余りは 1 次式以下．よって商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$x^9+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$

つまり，

$$x^9+1=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$$

商を消すような x を代入するのですから・・・分かるでしょう．a と b の連立方程式が登場します．

132 まさかとは思うが，$x=1-\sqrt{5}i$ をそのまま代入する人はいないでしょう．
$x=1-\sqrt{5}i$ を解にもつ 2 次方程式を考えます．機械的にやるなら，$x-1=-\sqrt{5}i$ として両辺を 2 乗します．つまり $(x-1)^2=-5$ より $x^2-2x+6=0$ です．
ここで，$x^4-4x^3+14x^2-19x+26$ を x^2-2x+6 で割った商と余りを考えます (筆算で求めてください)．

$$x^4-4x^3+14x^2-19x+26$$
$$=(x^2-2x+6)(\quad 商 \quad)+(余り)$$

よって，$x^4-4x^3+14x^2-19x+26$ に $x=1-\sqrt{5}i$ を代入するということは，$(x^2-2x+6)(\quad 商 \quad)+(余り)$ に $x=1-\sqrt{5}i$ を代入すること同じ．さらに，$x=1-\sqrt{5}i$ のとき $x^2-2x+6=0$ なので，実質的に (余り) の部分に $x=1-\sqrt{5}i$ を代入するだけになります．(余り) は 1 次式になるので，簡単に求められます．筆算による割り算がメンドウかもしれませんが，まともに代入することに比べれば格段に楽です．
なお，このタイプの問題は数学 Ⅰ の一番最初「数と式」でやってます．あのときは虚数は習ってなかったから，「$x=1-\sqrt{5}$ のとき，$x^4-4x^3+14x^2-19x+26$ の値は？」みたいな問題でした．全く同じでしょ．
注 最初の $x=1-\sqrt{5}i$ を解にもつ 2 次方程式を作る部分ですが，共役な複素数 $1+\sqrt{5}i$ も解にもつことから，解と係数の関係より，
和　$(1-\sqrt{5}i)+(1+\sqrt{5}i)=2$
積　$(1-\sqrt{5}i)(1+\sqrt{5}i)=6$
を計算して，$x^2-2x+6=0$ とするほうが数学的です．

133 (1)(2) は問題ないでしょう．(3) がよくミスります．基本的に組立除法は $x-\alpha$ で割った時の商と余りを求める方法です．(3) の場合，$2x-3$ で割ることになるので，このままの形では組立除法は使えません．

$$2x^3-7x^2+8x-8=(2x-3)(\quad 商 \quad)+(\quad 余り \quad)$$

そこで，次のように考えます．

$$2x^3-7x^2+8x-8=\left(x-\frac{3}{2}\right)(\quad 2\cdot 商 \quad)+(\quad 余り \quad)$$

つまり，$x-\dfrac{3}{2}$ で割ったと解釈して組立除法を用いますが，このとき求めた商は本来の商の 2 倍 (上の「2・商」のところ．分かりにくくてスミマセン) になっているので，2 で割ればよいのです．余りは同じ．

134 この問題は高校数学の全分野の中でもトップ 5 に入るくらい質問の多い問題です．3 年生になってもたくさんの生徒さんが質問に来ます．自分でやってもできず，模範解答を見ても「なんでこういう風に置けるんかわからない」というわけです．困りましたね．でも，ぶっちゃけ，この問題はほとんど入試には出題されないんで，別にできなくても支障ないんですけどね (笑)．

ゆっくり，詳しく解説します．

まず，セオリー通りに，余りの次数に注意して立式すると，

$$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+4x-5 \cdots ①$$

$$P(x)=(x+2)Q_2(x)-4 \cdots ②$$

$$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c \ ③$$

たいていの人はこのように立式します．

これまで同様，商を消去するような x を代入して関係式を作り，a，b，c を求めればよいのですが，使える関係式が，① より，$P(1)=-1$，② より，$P(-2)=-4$，の 2 つしかありません．③ で，余りを ax^2+bx+c と置いたのなら，a，b，c の 3 文字を決定するには関係式が 3 つ必要になってきます．ということは関係式が 1 つ足りないのです．どうがんばっても，関係式はこれ以上は出てこないので，このままでは解けません (ここで生徒さんの質問になるわけです)．

では，どうするか．関係式が 3 つ作れないのなら，余りを ax^2+bx+c などと 3 文字も使って表さずに，もっと少ない文字で表せばよいのです．

式 ① と ③ に注目しよう．① は，

> $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $4x-5$ である

ということでした．③ より，

$$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

なので，① は

> $(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $4x-5$ である．

と言い換えられます．

$(x-1)^2(x+2)Q(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるので，$(x-1)^2(x+2)Q(x)$ の部分からは $(x-1)^2$ で割ったとき余りは出ません．よって，

> ax^2+bx+c を $(x-1)^2$ で割った余りが $4x-5$

となります．ということは，

$$ax^2+bx+c=(x-1)^2\boxed{}+4x-5$$

と表せるはず．ここで，$\boxed{}$ に何が入るか考えてみると，2 次式を 2 次式で割ってるんだから，当然，定数が入ります．さらに，両辺の x^2 の係数に注目すると，$\boxed{}=a$ になることがわかります．つまり，

$$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+4x-5$$

したがって，以上の考察により，式 ③ の余り ax^2+bx+c は，$a(x-1)^2+4x-5$ に置き換えられることがわかったので，

$$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2+4x-5 \cdots ④$$

となります．こうなれば余りの表現に使った文字は a の 1 個だけなので，関係式は 1 個で十分．つまり，④ に $x=-2$ を代入すると，$P(-2)=9a-13$ なので，関係式 $P(-2)=-4$ より $a=1$ と求まります．よって，求める余りは $(x-1)^2+4x-5=x^2+2x-4$ となります．