第2章　複素数と方程式

5　高次方程式

$\boxed{135}$ 高校段階で高次方程式を解くには，因数分解するしか方法はありません．(1) と (2) は因数分解の公式

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

を利用しますが，ω の扱いに慣れている人は，ω を用いて解くのがスマートです．すなわち，$x^3=1$ の解が $x=1,\omega,\omega^2$ なので，

$$x^3=a^3 \iff \left(\frac{x}{a}\right)^3=1$$

より，

$$\frac{x}{a}=1,\omega,\omega^2$$

よって，$x^3=a^3$ の解は

$$x=a,\ a\omega,\ a\omega^2$$

となります．
(3)〜(6) は 4 次方程式ですが，x^4 と x^2 の項しかないので，$x^2=t$ とでもおけば，t の 2 次方程式になります．

$\boxed{136}$ 引き続き因数分解しますが，今度は『因数定理』を用います．つまり，

$$\begin{aligned} &P(x)\text{ が } x-\alpha \text{ を因数にもつ}\\ \iff &P(x)\text{ が } x-\alpha \text{ で割り切れる}\\ \iff &P(x)\text{ が } x-\alpha \text{ で割った余りが } 0\\ \iff &P(\alpha)=0 \end{aligned}$$

ようするに，$P(x)$ に $x=\alpha$ を代入して 0 になれば，$P(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつ，ということです．
例えば，(1) は，$x=1$ を代入すると 0 になるので，$x-1$ を因数にもちます．他にもあるかもしれません．こればかりは自分でイロイロ代入していちいち検証していくしかありません．
$\boxed{120}$，$\boxed{123}$ も参照しておこう．

$\boxed{137}$ なんのこっちゃない問題．$x=-1$ と $x=2$ を解にもつので，代入して終わり．

$\boxed{138}$ またまた高次方程式ですが，$\boxed{135}$，$\boxed{136}$ とちがってチョット工夫が必要かもしれません．(1)(2)(3) は最高次の係数が 1 ではないので，最初にテキトーに代入する数字が整数ではなく分数になるでしょう，$\boxed{125}$ を参照してください．(5)(7) はどう見ても置き換え問題．(4) と (6) が難しいかもしれませんね．
(4) は展開すれば最高次の係数が 1 の 3 次方程式になるので特別なことはないんですが，最初にテキトーに代入する数字が実は展開する前に (つまり問題を見ただけで) 分かるんですね．
(6) は・・・・数学 I の最初で登場したアレですね．まっ，考える楽しみをなくすといけないのでノーヒントで．

$\boxed{139}$ ω(オメガ) に関する計算問題．とても簡単なのにどういうわけか苦手とする人が多いんですよね．
$x^2+x+1=0$ の解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ ですが，この 2 つの解は実に興味深い性質を持っています．それは 2 つの解が 2 乗することでお互いに移りあうのです．このような現象は極めてマレなことです．

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

このことは必ず自分で計算して確認しておこう．
つまり，解の 1 つを ω とおけばもう 1 つは ω^2 となります．ω という記号は深い意味はありません．別に何の文字でもいいんですが，余りに特別な数なので，特別な記号 ω を使っただけです．
ですから「ω って何ですか？」と言われれば「$x^2+x+1=0$ の 2 つの解のうちどっちか好きな方で，もう 1 つの解が ω^2」としか言いようがありません．
いずれにしても，$x^2+x+1=0$ の 2 つの解

が ω，ω^2 になるので，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\omega+\omega^2=-1\\ \omega\times\omega^2=1\end{cases}$$

すなわち，

$$\omega^2+\omega+1=0,\qquad \omega^3=1$$

が成立します．これが「ω の性質」です．この性質を使って ω の計算をします．
例えば，(3) の場合，$\omega^3=1$ であることから，

$$\omega^{200}=\omega^{198}\omega^2=(\omega^3)^{66}\omega^2=\omega^2$$
$$\omega^{100}=\omega^{99}\omega^1=(\omega^3)^{33}\omega^1=\omega$$

よって，

$$\omega^{200}+\omega^{100}=\omega^2+\omega$$

$\omega^2+\omega+1=0$ より，求める値は $\omega^2+\omega=-1$ です．

140 137と同じ．なんのこっちゃない問題．$x=1$ と $x=2$ を解にもつので，代入して終わり．

141 定番の有名問題です．解法は 2 通り．まずは，$3+2i$ を解にもつので代入

$$(3+2i)^3-5(3+2i)^2+a(3+2i)+b=0$$

あとは展開，整理して実部と虚部に分けます．あとは，71を参照に「おまじないの一言」を述べて係数比較します．単純な方法ですが計算がかなりメンドウです．特に $(3+2i)^3$ がヤバイ．
もう 1 つの方法は，3 次方程式の解と係数の関係 (146参照) を利用するものです．
一般に実数係数の方程式が $a+bi$ を解にもつとき，その共役複素数 $a-bi$ も解にもつことが知られているので (厳密には数学 III で証明)，今回の場合，$3-2i$ も解になります．つまり，3 つの解のうち 2 つがわかっているので，残りの 1 つの解を α とでもおいて

$$3+2i,\quad 3-2i,\quad \alpha$$

で解と係数の関係を利用します．つまり，

$$\begin{cases}(3+2i)+(3-2i)+\alpha=5\\ (3+2i)(3-2i)+(3-2i)\alpha+\alpha(3+2i)=a\\ (3+2i)(3-2i)\alpha=-b\end{cases}$$

を解けば，a，b，α が簡単にもとまります．

142 3 次方程式は解を 3 個もちます．どのように解をもつかによって 3 次方程式の因数分解の形が変わってきます．つまり，3 個の異なる解をもつなら

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

となるでしょうし，3 個とも同じ (一致する) 場合は

$$(x-\alpha)^3$$

となります．特にこの場合，「3 乗」になっているので「3 重解」とも言います．
で，今回の「2 重解 2」ですが，まあ普通に考えれば何となく意味が分かるでしょう．つまり「$x=2$ という解を 2 重解にもっている」ということなので

$$(x-2)^2(x-\alpha)\ (\alpha\neq 2)$$

となるはず．ということは

$$x^3+ax^2+bx+3a+20=(x-2)^2(x-\alpha)$$

を満たす，a，b，α を求めればよいのです．
まあ，「展開して係数比較」がメンドウですがオーソドックスな方法でしょうかね．146で登場する 3 次方程式の解と係数の関係を使ってもかまいません．

143 とても重要な問題．前問と同様「2 重解」がテーマですが，もとの 3 次方程式に決定的な違いがあります．気が付きましたか．上の例題 13 を参照してください．因数分解できています！　これが最大のポイント．3 次方程式が (1 次式)(2 次式) の形に因数分解できれば，実質的に (2 次式) の部分，つまり 2 次方程式の解を考察することになります．今回の場合

$$(x-1)(x^2+4x+a)$$

と因数分解できますが，この後の処理がちょっと難しい．$\boxed{142}$でも紹介したように，「$x=\alpha$ を 2 重解にもつ」とは

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)\ \text{ただし，}\alpha \neq \beta$$

であることです．α と β は異なっていなければなりません．α と β が一致すれば「3 重解」になってしまいます．
よって，$(x-1)(x^2+4x+a)$ が 2 重解をもつ形になるには
・x^2+4x+a が $x=a$ 以外の重解をもつ場合
　　$\longrightarrow$ この場合，$(x-1)(x-\quad)^2$ の形になる．
・x^2+4x+a が $x=1$ と $x=1$ 以外の解をもつ場合
　　$\longrightarrow$ この場合，$(x-1)^2(x-\quad)$ の形になる．
この 2 つの場合について，慎重にギロンせねばなりません．
まずは上の例題 13 をしっかり理解することです．

$\boxed{144}$ 問題文のまま立式するだけ．

$$(x+1)(x+2)(x-1)=x^3\times 1.5$$

を解くだけかな．

$\boxed{145}$ 今のところはとりあえず求める複素数を $a+bi$ とでもおいて

$$(a+bi)^2=8+6i$$

とし，左辺を展開してから両辺の実部と虚部を比較するしかないでしょう．
なお，比較する際は「おまじないの言葉」を忘れないように．$\boxed{71}$をあらためて参照のこと．
なお，数学 III の複素数平面を学習すればまた違った視点からこの問題を理解することができるでしょう．

$\boxed{146}$ 重要な問題．3 次方程式の解と係数の関係です．これは憶えておかねばなりません．

▷Point◁

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α，β，γ とするとき，

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

が成立する．

本問の (1)〜(5) の式はすべて，α，β，γ の対称式です（どの 2 文字を入れ換えても式が変わらない）．対称式は必ず基本対称式（今回の場合，$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$）を用いて変形できます．特に (1)(2)(3) は定番の変形です．
(1) は $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$
(2) は $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
(3) も重要．問題集の下部のヒントに書いてあります．この式変形（因数分解の公式）はとても重要なので必ず憶えておこう．
(4)(5) はちょっと工夫が必要．どちらもバラバラに展開すればできるんですが，どうせならカッコよくやりたいですね．
今回の場合，そもそも，$x^3-3x^2-2x+7=0$ の 3 つの解が α，β，γ なんだから

$$x^3-3x^2-2x+7=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ \cdots(※)$$

と因数分解できるはず．
(4) は $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ の値を求めるわけですが，この式は（※）の右辺の x にある値を代入したものになってますね．ということはその値を（※）の左辺にも代入すればよさそうですね．
(5) は，$\alpha+\beta+\gamma$ の値がわかってることがヒントですね．
$\boxed{101}$（2 次方程式の解と係数の関係）も参照しておこう．