第 3 章　図形と方程式

4　2 直線の位置関係

$\boxed{169}$ 特に問題ないでしょう．2 直線が平行か，垂直か，は傾きを比べればわかります．

$\boxed{170}$ 重要な基本問題．(1)(ア) は公式で一発．(イ)(ウ) は図を描いて考えてください．
(2) は，$3x-5y-12=0$ の傾きが $\dfrac{3}{5}$ であることさえ分かれば問題ないでしょう．

$\boxed{171}$ 連立 1 次方程式の解の様子は，2 直線の位置関係と密接な関わりがあります．

$$\begin{cases} \text{解が 1 個} & \Longleftrightarrow \quad \text{交わる} \\ \text{解なし} & \Longleftrightarrow \quad \text{平行で離れる} \\ \text{解が無数} & \Longleftrightarrow \quad \text{平行で一致する} \end{cases}$$

でしたね．「解なし」と「解が無数」は平行条件だけでは区別がつかないので，実際に式を並べて比較する必要があります．

$\boxed{172}$ 対称点を求める計算は今後，様々な所で目にすることでしょう．
直線 l に関して A と B が対称であるとは，
・直線 AB が l と垂直
・AB の中点が l 上にある
この 2 つのことが成立すればよいのです．対称点の座標を $(p,\ q)$ とでもおいて，これらの関係を式に表すだけです．あとは p と q の連立方程式を解くだけ．

$\boxed{173}$ 「点と直線の距離の公式」は高校数学の中でも最重要な公式です．かならず覚えて使えるようにしておこう．証明も出来るようになってほしいですが，まずは使えることです．なお，直線の式は一般形で用いることに注意しよう．

$\boxed{174}$ 直線の方程式は「通る点」と「傾き」で決まります．線分 AB の垂直二等分線とは，AB の中点を通り，線分 AB に垂直な直線のことです．

$\boxed{175}$ 3 本の直線が 1 点で交わることの証明です．2 本の直線が交わることの証明は傾きが異なることを示すだけでできるのですが，3 本の場合はそう単純な話ではありません．どうするか？いろんな方法がありますが，とりあえず，3 本のうち，どれか 2 本が交わることを示して交点を求め，残りの 1 本がその交点を通ってることを示すのが良いでしょう．
今回は座標が与えられているので，直線の式や交点を計算することができましたが，では座標が与えられていない一般の図形の場合に，3 直線が 1 点で交わることはどのように証明するのでしょうかね？

$\boxed{176}$ 一般形の直線の方程式の平行条件，垂直条件に当てはめるだけです．

$\boxed{177}$ 一般的な 3 本の直線が三角形を作るかどうか判定する問題はなかなか難しい．しかし，今回の場合は 2 本の直線が確定しているので，残りの 1 本 (つまり $ax-2y=-4$) が確定している 2 本の直線に対してどのような位置関係にあればよいのか考えよう．自分でノートに直線をかいて，イロイロ考えてみよう．

$\boxed{178}$ (1) は $\boxed{172}$ と同じ方法でできます．問題は (2) ですが，(1) がヒントになっています．点 A が直線 $3x+y=15$ 上にありますよね．ということは・・・・求める直線の方程式は結局どの 2 点を通る直線のことになるのかな？
なお，いきなり (2) が出たらどうするのか．実は後ほど $\boxed{214}$ (2) で登場します．ここでは，いきなり対称な直線を求めよ，となっていますね．「軌跡の考え方を用いて」という指示があるのでなっているので，またそのときに考えましょう．

$\boxed{179}$ 「k の値に関係なく定点を通る」とは，「k にどんな値を入れても，$=0$ になるような x，y が存在する」いう意味です．

$$(k+2)x+(2k-3)y=5k-4$$

を k を主体に変形すると

$$(x+2y-5)k+2x-3y+4=0$$

となります．k にどんな値を入れても $=0$ になるような x，y の値を求めればよいので，そのような x，y は

$$x+2y-5=0 \text{ かつ } 2x-3y+4=0$$

で求めることができます．
いわゆる，k についての恒等式の考え方です．

180 普通に交点が分かれば，その交点と $(-4,\ 1)$ を通る直線を求めるだけなので，どうってことない問題ですが，実は交点が分からなくても直線を求めることができる夢のような方法があります．
例題 17 を参照してください．なんのこっちゃ？って感じですね．犬プリで詳しく解説する予定です．

181 交点が分かればフツーの問題ですが，前問同様に交点が分からなくても解けます．この問題も犬プリで解説します．とりあえずはパスしといてください．

182 これはなかなか面白い問題です．1 点で交わるのだから，交点 $(p,\ q)$ が存在します．それぞれの直線が $(p,\ q)$ を通るので，代入して

$$\begin{cases} p-q=1 \\ 2p-3q=1 \\ ap+bq=1 \end{cases}$$

となります．カンの鋭い人はこの式を見て「ああ，そういうことか．よって証明終わり」となるでしょうね．カンが鋭くない人のためにヒントをだします．
少し変形すると

$$\begin{cases} p\times1+q\times(-1)=1 \\ p\times2+q\times(-3)=1 \\ p\times a+q\times b=1 \end{cases}$$

となりますね．ここでいきなりですが，$px+qy=1$ という式を考えると・・・・そういうことでしょ．

183 三角形の 3 頂点の座標が与えられているときの三角形の面積をあえて，このタイミングでさせる理由は，あくまでも「底辺 × 高さ ÷2」を使え，ということなのでしょう．
要するに辺 BC の長さを求め，点 A から辺 BC に下ろした垂線の長さを点と直線の距離の公式を使って求めれば，底辺と高さが分かるので三角形の面積がわかるだろう，ということです．まあ，各種公式の練習にはなるでしょうが，あまりにもメンドウですね．まあでも練習やと思ってガマンしてやってください．
現実的には，座標平面に 3 点を図示して考えると（長方形から 3 つの 3 角形を抜くなどして）簡単に求めることができます．また，ベクトルの考えを用いるともっと簡単に求めることができます．

184 ポイントは点 P をどのように設定するのかということ．$y=x^2+4x+11$ 上にあるので

$$\mathrm{P}(t,\ t^2+4t+11)$$

とおこう．このような設定の仕方はよくやります．
となれば三角形の面積は前問と同様に計算することができます（当然 AB を底辺に考えます）．このとき三角形の面積は t の 2 次関数（絶対値付きですが）になるので，最小値をグラフを考えて求めます．
なお，この問題も興味深い背景があります．詳しくは微分法を学習したときに教えますが，なんとなく気づきませんか？最小値を与える P における 2 次関数の接線と直線 AB がどのような関係になっているのでしょうね．