

第3章 図形と方程式

5 円の方程式

185 円の方程式は2種類あり、中心と半径がわかっている場合には、標準形を用います。つまり、中心 (a, b) 、半径 r の円の方程式は

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

と表されるので、中心と半径が分かればすぐに式が作れます。

(1)(2) は中心も半径が最初から分かっているので問題なし。

(3)(4)(5) はどのような円になるのかイメージすれば、中心や半径も分かるでしょう。

186 特に申すことございません。ようするに、2次関数の平方完成を x と y それぞれでやればよいのです。

なお、この問題はちょっと意地悪でして、問題文のどこにも「円を表す」とは書いていません。つまり円にならない場合もあり得るというわけです。どういった場合に円にならないのか・・・まあ変形してみれば分かるでしょう。

187 今回の場合、中心や半径が分からないので、一般形の式で臨みます。つまり

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

を用います。これに3点の座標を代入すれば、 l, m, n が求まります。

なお、(2) で「外心」とか「外接円の半径」とかありますが、言うまでもなく、(1) で求めた円の中心や半径そのもののことですね。

188 応用問題。どれもこれも重要な問題です。まずはどのような円になるのかをイメージしよう。その上で標準形と一般形のどちらでいくのか自分で判断してください。

(1) は185(2) と同じような状況です。

(2) は求める円の半径は $x^2 + y^2 = 1$ と同じ。中心は $x^2 + y^2 = 1$ の中心を $(1, -3)$ に関して対称移動すればよいでしょう。

(3) は中心を $(a, 0)$ 、半径 r とおこう。

(4) は中心が (a, a) とおけますね。半径も分かっています。

(5) は円が x 軸と y 軸の両方に接することから中心と半径の関係がわかります。通る点が第1象限の点であることに注意して、円の式を正しく置こう。中心や半径の符号に注意すること。

(6) はとりあえず3直線の交点を求めるしかありません。3点が分かれば188と同じです。

結局、一般形を使うのは(6)だけだったみたいですね。

189 186を振り返ってみよう。変形した後で、どういう場合に「円」を表したのでしょうか？(円の半径はルートを使って表されますが、ルートの中身が a の2次関数になるはず。ということは、実質的に a の2次関数の最大値を考えるだけです。