第3章　図形と方程式

8　軌跡の方程式

軌跡の方程式は次の順序で求めます．

▷Point◁(キセキのキホン)

Step ①　点 P(X，Y) とおく．

Step ②　時間の流れに沿って立式する．場合によってはパラメータを導入し，X，Y，パラメータの間の関係式を作る．

Step ③　パラメータを消去し，X，Y だけの関係式を作る．

軌跡の問題は決して難しくありません．機械的に処理しよう．

208　点 P(X，Y) とおいて，それぞれの関係式を式で表すだけです．
なお，(1) は AB の垂直二等分線，(3) は AB を 1 : 3 に内分する点と外分する点を直径の両端とする円 (アポロニウスの円) になりますが，これらの有名事実を使うのではなく，むしろ軌跡の計算をして，確かにそうなっていることを確認するべきでしょう．

209　いずれの問題も点 Q が決まってから点 P が確定するようになっています．つまり，点 P の軌跡は点 Q に依存しているわけで，点 Q の座標も設定しないと点 P の軌跡を求めることはできません．とりあえずは Q(s，t) とおこう．

210　これも点 P(X，Y) とおいて，問題文の通りに式で表すだけです．
点 P と (0，-2) との距離は $\sqrt{(X-0)^2+(Y+2)^2}$
点 P と直線 $y=2$ との距離は $|Y-2|$
これらが等しいのです．当然ながら両辺 2 乗して計算しますね．

211　209 (4) と全く同じように思いますが，すこし違います．問題に「△PAB が・・・」とあります．ということは三角形が存在しない場合は不適です．実際に図を書いて点 P を動かしてみると，三角形が出来ない (グシャって潰れてしまう) 場合があると思います．そのときの P は除く必要があります．
このように軌跡には制限 (条件) がある場合があるので注意が必要です．

212　これまでと違って座標が全く与えられていません．単に AB = 2 とあるだけです．このような場合は自分で座標を設定します．自分の都合の良いように設定してかまいません．計算しやすいように設定しよう．
常識的に考えて 2 点 A，B の片方を原点にした方が計算が楽でしょう．
あとは点 P(X，Y) とおいて，問題文の通りに式で表して計算するだけですが，最後の答えの書き方に注意しよう．出てきた式をそのまま書いてはダメです．勝手に座標を設定したんだから，その式は答えにはなりません．ちゃんと状況を言葉で説明せねばなりません．

213　前問と全く同じです．自分で座標を設定します．出てきた答えを言葉で説明します．

214　質問の多い問題です．
まず (1)．2 直線のなす角の二等分線とは，2 直線から等距離にある点の集合なので，求める二等分線上の点を P(X，Y) とすると，P から 2 直線に下ろした垂線の長さが等しいと考えます．つまり，

$$\frac{|3X+2Y-5|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|2X-3Y+4|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$$

という関係式が得られます．あとは，この関係式を整理すればよいのですが，これがなかなかヤッカイで，一歩間違えればドロ沼にはまります．
まずは分母をはらって両辺を 2 乗します．

$$(3X+2Y-5)^2=(2X-3Y+4)^2$$

ここで展開し始めるとえらいことなります．

$$(3X+2Y-5)^2-(2X-3Y+4)^2=0$$

としましょう．$(\quad)^2-(\quad)^2=0$ の形になっていますね．何か気づきませんか．

(2) は，正直いって軌跡の考えを使わないほうが簡単なんですが・・・($\boxed{178}$ 参照).
$2x+3y=6$ 上の点を $(s,\ t)$ としよう．この点を $y=2x$ に関して対称移動した点を $(X,\ Y)$ として，X と Y の関係式を導き出せばよいのです．

$\boxed{215}$ パラメータ t を消去するだけ．特に問題ないでしょう．

$\boxed{216}$ まずは平方完成して頂点を求めよう．

$$y=(x-m)^2-m^2+1$$

つまり，頂点は $(m,\ -m^2+1)$
求める頂点を $(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases} X=m \\ Y=-m^2+1 \end{cases}$$

ここから m を消去します．$\boxed{215}$ と同じですね．

$\boxed{217}$ 直線と放物線の式を連立させると

$$x^2-x+k=0$$

になります．言うまでもなくこの 2 次方程式の解が交点の x 座標なので，直線と放物線が異なる 2 点で交わるには，判別式 $D>0$ より k の範囲がわかります．
中点を求めるには，この 2 次方程式を実際に解いても良いですが，せっかくなので解と係数の関係を使ってみよう．つまり，交点の x 座標を α，β とすると中点の x 座標は，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$．y 座標は $y=2x+k$ 上にあるので $2(\dfrac{\alpha+\beta}{2})+k=\alpha+\beta+k$
中点 $\mathrm{M}(X,\ Y)$ とおくと，$\alpha+\beta=1$ より，

$$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2} \\ Y=\alpha+\beta+k=k+1 \end{cases}$$

中点 M は x 座標が常に $\dfrac{1}{2}$ で一定，y 座標が $1+k$ という結果になりました．さてこれはどういうことなのでしょうか．「k が消去できない」なんて考えないでください．k が変化すれば中点 M がどのように変化するかをイメージすれば答えはおのずと見えてくるでしょう．

$\boxed{218}$ 難問．今はできなくても良いでしょう．犬プリでも同様の問題を詳しく解説してあります．どうしても気になる人は見ておいてください．