第4章　三角関数

6　加法定理

まずは，加法定理を完璧に暗記することです．すべての三角関数の公式は加法定理から導き出されます．

281 195° や $\frac{11}{12}\pi$ を有名角の和や差に分解しよう．一通りとは限りません

$195^\circ = 135^\circ + 60^\circ$.

あるいは，

$195^\circ = 240^\circ - 45^\circ$.

です．

$\frac{11}{12}\pi = \frac{3+8}{12}\pi = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi$

あるいは，

$\frac{11}{12}\pi = \frac{15-4}{12}\pi = \frac{5}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi$

です．

こうなれば，加法定理にぶち込んで計算するだけです．

なお，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値が分かれば $\tan\theta$ を求められますが，ここでは $\tan\theta$ 加法定理の練習も兼ねて，きちんと計算しとこう．

282 (1)(2) について．加法定理には，$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ の4つ全てが必要です．相互関係 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用して，4つ全ての値を求めよう．その際，α，β の範囲に注意して，符号を間違えないようにしよう．

(3) は tan の加法定理に代入するだけ．

283 2直線の成す角は tan の加法定理を使います．また y 切片は無視してもよいでしょう．

つまり (1) の場合，

$x - 2y + 4 = 0$ より $y = \frac{1}{2}x + 2$

$3x - y - 3 = 0$ より $y = 3x - 3$

ですが，実質，$y = \frac{1}{2}x$ と $y = 3x$ の成す角を考えればよいのです．

$y = \frac{1}{2}x$ と x 軸の正の向きとの成す角を α

$y = 3x$ と x 軸の正の向きとの成す角を β

とすれば，$\tan\alpha = \frac{1}{2}$，$\tan\beta = 3$ です．

つまり，この問題は，「$\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $\tan\beta = 3$ のとき，$\beta - \alpha$ の値を求めよ」と同じ意味になります．となれば，$\boxed{282}$(3) でやったことが意味を持ってくるわけです．

284 今のところは左辺を，加法定理を使って展開するしかないでしょう．メンドウですが落ち着いて計算すれば問題ありません．

個人的には，この問題は「積和の公式」と「2倍角の公式」を使って証明すべきだと思います．このほうが圧倒的に簡単です．

285 言うまでもなく

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

です．

$\tan\alpha = -1$ から，$\cos\alpha$，$\sin\alpha$ の値が，$\tan\beta = -2$ から，$\cos\beta$，$\sin\beta$ の値がわかるので問題ないでしょう．α も β 鈍角なので三角関数の値の符号も決定しますしね．

286 例年，質問の多い問題．パズルみたいです．

フツーに加法定理にぶち込むと

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1$$

となるので，大抵の人は，「よって，$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ または $\frac{5}{4}\pi$」と思うようです．しかし，$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ には絶対になりません．

問題文に「α，β，γ は鋭角」とありますが，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan\gamma$ の値がすべて1より大きいので，実際には「α，β，γ は鋭角で $\frac{\pi}{4}$ より大きい」のです．

287 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ より，$\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta$ などとして代入してもできますが，上手く計算したいものです．

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ より，$\tan(\alpha + \beta) = 1$ ですね．ということは，$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1$ ということです．

つまり，$\tan\alpha + \tan\beta = 1 - \tan\alpha\tan\beta$ です．あれ？終わった？

288 まずは丁寧に図示してみてください．要するに求める直線は x 軸の正方向とのなす角はどうなっているのかな．

$\boxed{289}$ これもパズルです．言うまでもなく

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

なので，$\cos\alpha\cos\beta$ と $\sin\alpha\sin\beta$ を求めて引けばよいのです．
$\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ から $\sin\alpha\sin\beta$ を作り出すにはどうしたらよいでしょうか.
$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ から $\cos\alpha\cos\beta$ を作り出すにはどうしたらよいでしょうか.
なお「な〜んだ，こんなのカンタンだ」と思った人は，$\cos(\alpha-\beta)$ の値も求めてみてください．ビックリするくらいムツカシイよ．

$\boxed{290}$ ああ，この問題は数学 III の複素数平面の考えでやるべきです．複素数平面を学習してからやりましょう．なので，III が不要な人はやらなくてよろしい．

$\boxed{291}$ 「棒の赤い部分を見込む角」という言い回しが数学特有ですねえ．

$\boxed{292}$ 解と係数の関係より

$$\tan\alpha+\tan\beta=-3,\ \tan\alpha\tan\beta=-2,$$

です．この 2 式から何をするのか，がポイント．
求める式の値が $\alpha+\beta$ 主体の式になっていることに注目しよう．となれば，解と係数の 2 つの関係式から $\tan(\alpha+\beta)$ の値を求めてみたくなるはず．この値が分かればあとは簡単です．$\alpha+\beta=\theta$ とおき，求める式

$$\sin^2\theta+3\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta$$

を $\cos^2\theta$ でくくりだしてみてください．うまいことなってるでしょう．