第4章　三角関数

第2節　加法定理

7　加法定理の応用

293 三角関数では，各公式も大切ですが，それ以上に「角度の範囲」に注意する必要があります．角度の範囲によって三角関数の符号が決定するからです．例えば，(1) の場合，$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ なので，$\sin\alpha > 0$，$\cos\alpha < 0$，$\tan\alpha < 0$ となります．これらは単位円をイメージすれば分かることです．
したがって，(1)(2) ともに角度の範囲に注意して，まずは $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を決定します．それがわかれば 2 倍角の公式に当てはめるだけです．

294 2 倍角の公式をぶち込んで計算（ていうか式変形）するだけ．いちおう等式の証明ですから，等式の証明のルールに従ってくださいね．この場合は，(左辺) = ⋯，(右辺) = ⋯ とそれぞれ計算（式変形）して両者が一致することを確認すればよいでしょう．

295 半角の公式は，

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

と一般的に書かれますが，むしろ，

$$\sin^2\bigcirc = \frac{1-\cos\triangle}{2}$$

$$\cos^2\bigcirc = \frac{1+\cos\triangle}{2}$$

と考えて，△ は ◯ の 2 倍と思うことがポイントです．
また，半角の公式は，2 倍角の公式や 3 倍角の公式と違って，$(\quad)^2 =$ の形になっているのが特徴です．
したがって，(1) の場合，$\sin\frac{\pi}{12}$ の値を求めるのに，$\sin\frac{\pi}{12} =$ と始めても，どうにもなりません．$\sin^2\frac{\pi}{12} =$ と 2 乗の形からスタートせねばなりません．
さらに注意すべきことがあります．公式に当てはめると

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

となるので，丁寧に書けば

$$\sin\frac{\pi}{12} = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

とし，「$\sin\frac{\pi}{12} > 0$ なので」と一言断ってから，

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

とします．「そんなん正の数になるのは当たり前やから確認せんでもエエやろ」と思っている人は次の 296 で苦労するでしょう．

296 293 と同じようですがちょっと様子が違います．293 は，角 α の三角関数の値から角 2α の三角関数の値を求めるため 2 倍角の公式を使いました．今回は，角 α の三角関数の値から角 $\frac{\pi}{2}$ の三角関数の値を求めるため，半角の公式を使います．先ほども述べたように，半角の公式は，

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

という形をしているので，

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

と符号が定まりません．295 は具体的な角で与えられているので，符号は決定しましたが，今回はそう単純な話ではありません．
例えば，(1) の場合，$\cos\alpha = -\frac{3}{5} < 0$ なので，実際は $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ です．よって，$\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ になるので，$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\pi}{2}$ の値はすべて正の数です．
また (2) も，$\tan\alpha = 2 > 0$ なので，実際は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ です．
(3) は $\cos 2\alpha = \frac{1}{3} > 0$ なので，$0 < \alpha < 2\pi$ より，$0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ または $\frac{3\pi}{2} < 2\alpha < 2\pi$．つまり，$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ または $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ となります．

なんだかとてもヤヤコシイですが，常に角の範囲を意識していれば気づくはずです．

$\boxed{297}$ $\boxed{294}$と同様．3 倍角の公式や 2 倍角の公式を代入して計算するだけ．この場合は，(左辺) に 3 倍角の公式を代入して，因数分解すると自動的に (右辺) になると思います．
3 倍角の公式は覚えておいたほうが良いでしょう．$\sin 3\alpha$，$\cos 3\alpha$ の形を見れば，右辺のように因数分解できる理由が分かるでしょう．$\cos\alpha = A$，$\sin\alpha = B$ とでもおいてみたら？

$\boxed{298}$ $\tan\alpha$ と $\cos\alpha$ はとても相性が良いのです．

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

より，$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+t^2}$ となります．

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

なので，$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+t^2}$ を代入すれば $\cos 2\alpha$ も t で表されそうです．
$\sin 2\alpha$ を求めるときは少し注意が必要です．$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ なので，$\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ を求めようとするでしょう．まず，$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+t^2}$ から $\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1+t^2}}$．
問題はここからです．$\sin\alpha$ をどのようにして求めますか．$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ から $\sin\alpha$ を求めようとすると，かなりメンドウなことになります (やればわかります)．そもそも，$\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1+t^2}}$ となってますが，符号はどっちも正しいんですか？　問題文には角度の範囲は何も書いてませんよ．
実は，この部分は次のような意外な変形で，すべて解決します．

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\tan\alpha\cos^2\alpha$$

つまり，$\cos\alpha$ にせずに $\cos^2\alpha$ のままで計算することができます．こうすれば符号の心配など全く関係ありません．
$\tan\alpha = t$ とおいて，$\sin 2\alpha$ と $\cos\alpha$ を t で表す問題はとても有名です．今回の場合，その一歩手前の $\cos^2\alpha$ を t で表すように指示されていますが，なかったとしても上のような流れで求められるようになっておこう．

$\boxed{299}$ ここからの 3 問 ($\boxed{299}$〜$\boxed{301}$) は非常に大切なので，じっくり完璧に身につけるようにしよう．
まずは，$\boxed{271}$と$\boxed{272}$，$\boxed{277}$と$\boxed{279}$が完璧かどうか確認しておこう．この 3 問が完璧であれば大丈夫です．完璧でない人はもどってやり直し！(厳しいですけど)．

まずは方程式の問題．ここでは兎にも角にも「積の形を作る」ことが目標です．よく「1 種類だけの三角関数でそろえる」と真っ先に言う人がいますが，違います．1 種類で統一できなくても積の形に変形できさえすれば良いのです．例えば (2)．$\sin 2x = \cos x$ より
$2\sin x\cos x = \cos x$．
移項して $2\sin x\cos x - \cos x = 0$．
つまり，$\cos x(2\sin x - 1) = 0$ となります．
ここから先は言うまでもないでしょう．
(1)(3) は 1 種類の三角関数で統一して積の形を作ります．そうなれば$\boxed{279}$(1)(2) と全く同じですね．
(4) は (1)(2)(3) の融合体みたいな感じでしょうか．

$\boxed{300}$ 今度は不等式．ここでもやっぱり積の形を作ることがポイント．(1)(2) は 1 種類の三角関数で統一して積の形を作ります．そうなれば$\boxed{279}$(3)(4)(5) と全く同じですね．
(3) は$\boxed{279}$(6) と全く同じ．$\boxed{299}$(2) もヒントになるかもしれません．

$\boxed{301}$ 最後は最大最小問題です．方程式，不等式と違って積の形を作る必要はなく (ていうか，積の形を作っても何の意味もない)，原則的に 1 種類で統一です．今回の場合，$\sin x$ で統一することになるでしょう．$\sin x = t$ とおけば t の 2 次関数になると思いますが，ここで注意するのは t の範囲です．$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ですから，当然 t にも範囲がついてきますね．
例題 28 も参照のこと．

$\boxed{302}$ う〜ん，いきなり三角関数のグラフって，ちょっと異質な感じがします．今はやらなくてもよいでしょう．そのうち時期が来ればできるようになります．
どうしてもという人は，例題 31 と $\boxed{319}$ をやったあとで「ああ，そういう見方もあるのね」って実感してください．

$\boxed{303}$ これもなかなか異質な問題ですね．ちょっと気づきにくい問題です．
まず，与えられた関係式が角 B と角 C についての式なのに，目的の結果が角 A に関することなのに違和感を感じませんか．ということは，3 つの角 A，B，C の間の関係式が必ず必要になってきます．言うまでもなく三角形の内角なので $A+B+C=\pi$ です．ということは，

$$\angle A \text{ が直角} \Longleftrightarrow B+C=\frac{\pi}{2}$$

なので，

$$\tan B\tan C=1 \Longrightarrow B+C=\frac{\pi}{2}$$

を示すことになります．
$\tan B\tan C=1$ より，$\dfrac{\sin B}{\cos B}\cdot\dfrac{\sin C}{\cos C}=1$ なので，$\sin B\sin C=\cos B\cos C$．つまり，$\cos B\cos C-\sin B\sin C=0$．この式をみて何か思いつきませんか？
それにしてもこういう問題，懐かしくないでしょうか．数学 I の正弦余弦定理のとこでやりましたよね．正弦余弦定理を用いて証明することはできないのでしょうか．

発展　和と積の公式

$\boxed{304}$ 「積 ⟶ 和の公式」に当てはめるだけ

$\boxed{305}$ 「和 ⟶ 積の公式」に当てはめるだけ

$\boxed{306}$ これも，ただただ『和と積の公式』に当てはめるだけです．それにしてもこんな値を求めてどーすんねん！って感じですね．

$\boxed{307}$ $\boxed{306}$ では 2 個の和や積やったやつが，3 個の和や積になっただけですが，ちょっと工夫が必要なようです．例題 29 を参照のこと．

$\boxed{308}$ 問題を見るなりウンザリしますね．嫌がらせでしょうか．いっそのこと，加法定理で一気に全部バラして計算してやろうかと思いますが (マジでやりかけた)，そんなことしたら悲惨．腕が攣りそうなくらい計算する羽目になるでしょう．ああ，やっぱり『和と積の公式』を使うのですね．

$\boxed{309}$ これは大切な問題です．方法は 2 つ．
まずは，$\cos 3x$ に 3 倍角の公式を用いて，式を $\cos x$ だけで表そう．そうすれば，「因数分解して積の形を作る」という大原則に従って，積の形に変形できます．終了．
もうひとつは，和と積の公式を用いて，いきなり $\cos x+\cos 3x$ を積の形に変形する方法．この場合は角の範囲に注意する必要がありますが，計算はかなり楽です．
いずれにしても，「積の形を作る」という目的は同じです．両方の方法でやっておくことを薦めます．どっちも大切な方法ですので．

$\boxed{310}$ 今度はさすがに 5 倍角の公式なんて知らないでしょうから，$\cos 5x$ を $\cos x$ を用いて変形することは不可能です．よって和と積の公式を用いて積の形に持ち込むしかないですね．
では，$\cos x$ と $\cos 3x$ と $\cos 5x$ のうちどの 2 つを積の形にもっていくのか．まあ常識的に考えて，アレとアレをまとめるでしょうねえ．でも，$\boxed{309}$ とは違って不等式やから，積の形に持っていてからの最後の一山がメンドウかもね．

$\boxed{311}$ これも大切な問題です．
こういう問題を見たときに考えるべきことは「一体，何ができるか？それをすればどうなるのか？」をしっかり考えることです．今回の場合，できることといえば
① 式の後半を加法定理でバラす．
② 積と和の公式を使う．

くらいでしょう（数学 Ⅲ を学習すれば「微分法」という手もありますが今回は無視）.

① でやってみると

$$\begin{aligned} y &= \sin x(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\sin x \cdots ① \end{aligned}$$

となりなんだか難しそうです．でもこれは後ほど学習する重要な問題（例題 31 や $\boxed{319}$）と全く同じタイプで，そこで学習することを使えば解き進めることができます．なので，いったんパスします．後ほど必ず，この方法で解いてください.

② でやってみましょう.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}\{\cos(x+x+\frac{\pi}{3})-\cos(x-(x+\frac{\pi}{3}))\} \\ &= -\frac{1}{2}\{\cos(2x+\frac{\pi}{3})-\cos(-\frac{\pi}{3})\} \\ &= -\frac{1}{2}\{\cos(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}\} \\ &= -\frac{1}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{4}\cdots ② \end{aligned}$$

となります.

ここまでくれば，$\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ に注目して，この部分の最大最小を考えれば y の最大最小がわかると思います.

なお，式 ① を変形すれば確かに式 ② になります．この変形の方法については次の章で学習する「三角関数の合成」を利用します.

$\boxed{312}$ う～ん，『和と積の公式』を利用する単元やから，公式を使いまくって変形するんだろうけど，推察力と計算力と経験，この 3 つのうちどの 1 つが欠けてもできないだろうなあ．(左辺) = ⋯ で変形する際に，(右辺) の形を常ににらみながら，少しずつ (右辺) に近づけていこうという姿勢が大切．つまり，(左辺) から (右辺) の因数，$\sin A$ や $\sin B$ や $\sin C$ を捻出するように心がけねばならない.

例えば，まず『和と積の公式』を利用して，

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C \\ &= 2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}+\sin 2C \\ &= 2\sin(A+B)\sin(A-B)+\sin 2C \end{aligned}$$

と変形した場合，最後の式の中に (右辺) の因数，$\sin A$ や $\sin B$ や $\sin C$ が見えるだろうか？僕には見える．つまり，$A+B+C=\pi$ より，

$$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$$

2 倍角の公式より，

$$\sin 2C=2\sin C\cos C$$

とすることで，共通因数 $\sin C$ が出てくるではないか！よって，

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C \\ &= 2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}+\sin 2C \\ &= 2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2C \\ &= 2\sin(\pi-C)\cos(A-B)+2\sin C\cos C \\ &= 2\sin C\sin(A-B)+2\sin C\cos C \\ &= 2\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\} \end{aligned}$$

$2\sin C$ をくくりだすができた．少しだけ (右辺) に近づいた．あと一息！

ここから先は各自で工夫してがんばってください．$\cos(A-B)+\cos C$ が $2\sin A\sin B$ になればよいのです.