第 4 章　三角関数

第 2 節　加法定理

8　三角関数の合成

$\boxed{313}$ 授業でも説明したように，三角関数の合成は加法定理の単なる逆にすぎません．したがって，加法定理を常にイメージすることが大切です．合成の方法については，犬プリで詳しく説明してあるのでそちらを参照してください．

$\boxed{314}$ 正直どうでもエエ問題です．$\sin\dfrac{\pi}{12}$ や $\cos\dfrac{\pi}{12}$ の値がわかっていれば簡単に計算できるが，わからなくても合成の考えを使えば求められるで〜，というだけの問題．
なお，合成しなくても計算できますよ．まずはそのまま 2 乗してみてください．そこで 2 倍角の公式を使うと・・・できました！

$\boxed{315}$ この問題と次の問題はすごく大切です．しっかりと理解して解法を必ず身につけておこう．
三角関数の方程式や不等式を解く場合の大原則は，1 種類の三角関数にそろえて積の形を作ることでしたが，この場合は，1 種類でそろえることもできないし積の形にすることもできません．じゃあ，どうするのかというと，残る手立ては「合成」しかないのです．
合成するとおそらく $\boxed{274}$ や $\boxed{276}$ (1)(2) みたいな形になっていると思います．この問題を解いた記憶を思い出してください．何を意識しましたか．それは「角度の範囲」でしたね．

$\boxed{316}$ 今度は不等式．前問と同じく「合成」しか手立てがありません．合成するとおそらく $\boxed{275}$ みたいな形になっていると思います．この問題を解いた記憶を思い出してください．何を意識しましたか．それは「角度の範囲」でしたね．
なお，(2) だけは合成しなくても解けます．$\cos x$ の正負で場合分けする必要ありますが，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ と $\tan x$ の大小比較すればよろしい．

$\boxed{317}$ この問題もとても大切です．三角関数の最大最小問題の原則も，まずは 1 種類の三角関数に統一して置き換えすることでしたが，やっぱり今回も無理っぽい．よって，$\boxed{315}$ と同様に，残る手立ては「合成」しかない．
なお，(3)(4) は x の範囲が書いてありませんが，こういう場合は x はすべての実数をとり得ると解釈します．また，(3)(4) の場合，実は合成で用いる角 α が具体的に決まらないのですが，全く問題なく最大最小が確定します．

$\boxed{318}$ 大学入試でよく出そうな問題です．$\boxed{317}$ とほとんど同じようですが，唯一の違いは角度の範囲だけです．しかしこれが最も重要なポイント．(1) は合成したときの角 α が定まるので問題ないでしょう．単位円をイメージして最大最小をチェックしてください．
(2) が難しい．(2) は角 α が具体的に定まりません．$\boxed{317}$ (3)(4) も定まらなかったのですが，あの時は x の範囲がすべての実数だったので，特に気にせず「$-1 \leqq \sin(x+\alpha) \leqq 1$ なので・・・」で解決しました．今回は，x の範囲が $0 \leqq x \leqq \pi$ です．これがどう影響するのか．
少し解説してみましょう，合成すると

$$y=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)\cdots\cdots(※)$$

になるのは問題ないでしょう．言うまでもなく α は

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdots\cdots(※※)$$

を満たす角です．
x がすべての実数を取りうるのなら，(※) より y の範囲は $-\sqrt{5} \leqq y \leqq \sqrt{5}$ になるのですが，$0 \leqq x \leqq \pi$ なので，

$$\alpha \leqq x+\alpha \leqq \pi+\alpha$$

つまり，この範囲内で (※) の範囲を考えねばなりません．単位円上にこの範囲を図示してみよう．角 α は (※※) より第 1 象限にあります．ここをスタートとして π だけ進むから，半円分になるはずです．この半円の範囲内で $\sin(x+\alpha)$ の最大最小はどこで

しょうか．$\sin(x+\alpha)$ とは y 座標のことですね．
この部分を自分でしっかり考えてください．
おそらく

$$x+\alpha=\frac{\pi}{2}\text{のとき最大}$$

$$x+\alpha=\pi+\alpha\text{のとき最小}$$

あとは最大値，最小値を求めるだけです．最大値に関しては，$x+\alpha=\frac{\pi}{2}$ のときだから，(※) に代入すればよろしい．
最小値は，$x+\alpha=\pi+\alpha$ のとき，つまり $x=\pi$ のときになるから，(※) ではなく合成する前の式に代入した方が良いでしょう．
なお，最小値は計算ではなく，単位円をみて図形的に解釈して求めることもできます．

$\boxed{319}$ ああ，これも大切．3 年生になってからも頻繁に目にする問題です．まずは上の例題 31 を参照すること．なぜ、こんな変形をしているのかわかりますか．最大最小問題の原則は，1 種類で統一して置き換え，無理なら合成，でした．でも今度はいずれも無理なのです．じゃあ，どうするのか．ポイントは 2 倍角の公式を利用した「次数下げ」です．まず，

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

を利用すれば，$\sin x$ と $\cos x$ の積が $\sin 2x$ になります．次数が 2 次から 1 次に下がったわけです．同様に，

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x$$

より，

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1$$

より，

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

を利用すれば，$\sin^2 x$ と $\cos^2 x$ が $\cos 2x$ で表されてます．これも次数が 2 次から 1 次に下がったわけです．
つまり，もとの式が $\sin 2x$ と $\cos 2x$ で表されることになり，結果的に $\boxed{317}$(2) と同じような形になるのです．

$\boxed{320}$ $\boxed{320}$ と同様．a と b のままでまずは合成しよう．

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$$

当然，合成で用いる角 α が具体的に決まらないのですが，$\boxed{317}$(3)(4) と同様に，x はすべての実数をとり得るので，$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$ だから最大値と最小値はわかります．a と b の関係式が 1 つ出ました．
a と b の 2 つを決定するには式がもう 1 つ必要です．気づいていると思いますが，最大値は 5 ですね．$x=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 5 ということなので・・・このことから a と b の関係式が出ます．

$\boxed{321}$ これも大事な問題やと思います．$\boxed{319}$ とペアでマスターしよう．まずは例題 32 を参照のこと．最大最小問題の原則はやはり 1 種類だけの三角関数で統一して置き換えすることですが，この問題ではそれはムリです．ではどうするのか．
この問題の根底にあるのは，和 $\sin x+\cos x$ と積 $\sin x\cos x$ は相性が良いということ．
つまり，和 $\sin x+\cos x=t$ と置くことで，積 $\sin x\cos x$ も t で表すことができ，結果的に t だけで統一することができるのです．
重要な考え方です．
なお，このような手法が取れるのは式の係数が対称的であることが大前提です．つまり

$$y=2(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x+1$$

のように $\sin x$ と $\cos x$ の係数が同じになっていることを意識しよう．もし同じじゃなかったら，例えば

$$y=2\sin x+3\cos x+2\sin x\cos x+1$$

という式ならムリです．
そうそう，和 $\sin x+\cos x=t$ とおく場合，t には条件（範囲）がつくことを絶対に忘れてはいけません．t の範囲の求め方は言うまでもないと思いますが．