第5章　指数関数と対数関数

1　指数の拡張

$\boxed{322}$ 指数法則の基本.

$$a^0 = 1. \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

を利用します.

$\boxed{323}$ これまた指数法則の基本.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

を利用します.

$\boxed{324}$ $\boxed{322}$ と $\boxed{323}$ の融合問題. 指数部分に注目して計算します.

$\boxed{325}$ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ によって, 累乗根を分数乗に変換して考えます. あとは指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ に従うだけです.
(1) だけやってみます.

$$\sqrt[4]{256} = (256)^{\frac{1}{4}} = (2^8)^{\frac{1}{4}} = 2^{8\times\frac{1}{4}} = 2^2 = 4$$

これ以上ないくらい丁寧にやってみました.
(1) の「256」や (2) の「216」という数字は有名なので, すぐに「$\bigcirc^{\triangle}$」の形に直せるようにしておこう.

$\boxed{326}$ (1)(2) は $\boxed{325}$ と同様.
(3)〜(6) は累乗部分が同じなので中身だけ計算できます. 例えば (3) は

$$\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{4\times 10}$$

ここから先ですが, 累乗根内を因数分解して

$$= \sqrt[3]{2\times 2\times 2\times 5}$$

「3 乗根」とは「根号内の数字 3 個を 1 個にして外に放り出す」わけですから

$$= 2\sqrt[3]{5}$$

となります.

$\boxed{327}$ これも指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ に従うだけです. 例えば (2) の場合,

$$8^{-\frac{4}{3}} = (2^3)^{-\frac{4}{3}} = 2^{3\times\left(-\frac{4}{3}\right)} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

となります.

$\boxed{328}$ (2) が一番カンタン. 底がそろっているので指数法則を使って計算します. $\boxed{324}$ と同じ.
(1) と (3) は底がそろっていません. まずは底をそろえることからはじめよう.
(4) は $\dfrac{16}{25} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2$ ですから・・・

$\boxed{329}$ まず (1)〜(3) が積と商, (4)〜(6) が和と差の式になっています. この違いは指数計算の方法に重要な影響を及ぼします.
(1) は 3 乗根が共通なので $\boxed{326}$ (3) と同じ考え方でできます.
(2) は指数も底も異なっていますので, どちらかをそろえないとどうしようもありません.

$$\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{2}{4}} = (6^2)^{\frac{1}{4}} = (36)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{36}$$

とかんがえれば

$$\sqrt[4]{6}\times\sqrt{6}\times\sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{6}\times\sqrt[4]{36}\times\sqrt[4]{12}$$

となり (1) と同じタイプです. (3) も同様.
言うまでもなく「4 乗根」とは「根号内の数字 4 個を 1 個にして外に放り出す」わけですからそのまま積や商を計算してしまうのではなく. うまく因数分解して「ヨンコイチ」でまとめてください.
(4) は係数を足すだけ

$$2\sqrt[4]{5} + 3\sqrt[4]{5} = 5\sqrt[4]{5}$$

まッ, $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$ と同じ感覚ですね.
(5) と (6) は累乗根が同じですが和や差なのでどうすることもできません (積や商ならそのまま中身だけ計算できます). となればそれぞれの項をカンタンにするしかありません.
(5) の場合,

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3\times 3\times 3\times 3} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2\times2\times2\times3}=2\sqrt[3]{3}$$

です.「3 乗根」とは「根号内の数字 3 個を 1 個にして外に放り出す」んでした. こうなれば (4) と全く同じです.
(6) も同様. それぞれの項をカンタンにします (当然ながら $\sqrt[4]{2}$ はこれ以上は無理です).

330 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ によって, 累乗根を分数乗に変換して考えます. あとは指数法則に従うだけです.

331 指数部分が分数になっただけで **324** と全く同じ.

332 それぞれ置き換えるすると見やすく, 考えやすくなります.
(1) は $a^{\frac{1}{4}}=A$, $b^{\frac{1}{4}}=B$ とおくと ($A^4=a$, $B^4=b$ です),

$$(A^2+AB+B^2)(A^2-AB+B^2)$$

(2) は $a^{\frac{x}{3}}=A$, $b^{-\frac{x}{3}}=B$ とおくと ($A^3=a^x$, $B^3=b^x$ です),

$$(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

となります.

333 いずれも因数分解の公式が根底になります. 必要に応じて置き換えするなどして見やすく考えやすくしよう.
(1) は, $\sqrt[4]{6}=A$, $\sqrt[4]{5}=B$ とすれば, $(A+B)(A-B)$ のこと.
(2) は $5^{\frac{1}{3}}=A$, $3^{\frac{1}{3}}=B$ とおくと, $(A+B)(A^2-AB+B^2)$ のこと.
(3) はいろいろな置き方がありますが, $\sqrt[3]{2}=A$, $\sqrt[3]{4}=B$ とすれば $(A+B)^3+(A-B)^3$ となります. 言うまでもなく $A^3=2$, $B^3=4$ で, 積 AB の値が・・・ですね.

334 負の数の累乗根ですが, あんまり深く考えずにこれまでと同様にやります.
(1) は $-216=(-6)^3$,
(2) は $-32=(-2)^5$,
(3) は $-\frac{1}{64}=\left(-\frac{1}{4}\right)^3$
と考えることがポイント.
(4) と (5) の違いに注意しよう. (4) も (5) も全て 3 乗根 (つまり $\frac{1}{3}$ 乗) で共通ですが (4) は積や商, (5) は和です. この違いが解法にどのように影響するのでしょうか. とても重要な違いです.
329 の (1) と (6) を思い出そう.

335 これも置き換えをすると見やすいです. $x^{\frac{1}{3}}=A$ とおくとこの問題は「$A+\frac{1}{A}=3$ のとき, $A^3+\frac{1}{A^3}$, $A^9+\frac{1}{A^9}$ の値を求める」ことになります.
3 乗の公式

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

を利用します.

336 まずは, $(a^{4x}-a^{-4x})\div(a^x-a^{-x})$ を計算しておこう. $a^x=A$, $a^{-x}=B$ とでもおいてください. すると $(A^4-B^4)\div(A-B)$ となります. A^4-B^4 がうまく因数分解できるので計算できますね. $a^{2x}=5$ ということは, $A^2=5$ ということです. さらに, A と B の間に成り立つ関係を考えれば・・・

337 $2^x=A$ とでもおくと, ようするに「$A-\frac{1}{A}=3$ のとき, $A+\frac{1}{A}$ の値を求めよ」というだけのことです. さて, どうするのか? ヒントは $A-\frac{1}{A}=3$ の両辺や $A+\frac{1}{A}$ を 2 乗してみよう.
なお, $A-\frac{1}{A}=3$ から実際に A の値を求めることができるので (できますか?), その値を $A+\frac{1}{A}$ に代入しても良いです.