第 1 章　式と証明

5　恒等式

イマイチ何のことだかよくわからん『恒等式』. わかったような，わからんような，って感じですが，数学的にはとても大切な概念です.「係数比較して終わりでしょ」と思っているアナタ．大学入試における『恒等式』の本格的な問題は極めてムツカシイのですぞ.

まあ，でも今のところはその程度の理解でも構いません.

▷Point◁ (方程式と恒等式)

特定の数で成り立つ式が「方程式」
全ての数で成り立つ式が「恒等式」

$x^2-5x+6=0$ は方程式です.

なぜなら，$x=2,3$ のときしか成立しないからです.

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ は恒等式です. なぜなら，x にどんな数字を入れても成立するからです.

なお，「成立する」とは，「(左辺) と (右辺) が一致する」という意味です.

また，よって，

整式 $P(x)=0$ が x についての恒等式である

とは，どんな x に対しても成立する，つまり，「式として」0 である (言い換えれば x 軸に一致する) ということなので，

x の係数が全て 0 である

ということに他なりません.

33 いきなり○×クイズですか．単純に言えば，両辺をそれぞれ展開して，式として同じ形になっていれば「恒等式」なんですけどねえ．まあ，展開もそれほど大変でもなさそうだから，まあ，それで良しとしましょうかねえ．もう少し数学的に考えるなら，例えば 2 次式の場合，異なる 3 点での値が一致すれば式として一致するから，(1) や (3) では，テキトーに 3 つの数字を代入して両辺の値が一致すればＯＫです.

34 展開して係数比較するか，テキトーに数値を代入して確認するか，の 2 通りですね．うまく使い分けてください.

35 分母をはらえば，34 と同じ．だから解説しないよ.

36 この辺の問題は正直あんまりやりたくないですね．整式の割り算の問題 (商や余りに関する問題) は，のとほど第 2 章の 4 で学習します．こっちがメイン.

今回はあくまでも『恒等式』の範疇なので，ある意味，単なる係数比較です．なのであんまり深刻にならずにかる〜く考えてください.

A を B で割ると，商が Q，余り R

$$A=BR+Q$$

(1)　3 次式を 2 次式で割ると商は 1 次式で，余りは 1 次式以下になります．よって，

$$2x^3+ax+10=(x^2-3x+b)(cx+d)+3x-2$$

展開して係数比較して終わり.

(2) も全く同じ．3 次式を 2 次式で割ると商は 1 次式で，余りは 1 次式以下．よって，

$$x^3+ax^2-5x+4=(x^2+bx-2)(cx+d)+2$$

展開して係数比較して終わり.

う〜ん，何にも面白くない！

✎**注**　実際に筆算で割り算をして，余りの係数を比較してもかまいません.

例えば (1) の場合，

$$\begin{array}{r|l}
 & \phantom{2x^3-{}}2x+6 \\
x^2-3x+b & 2x^3 \qquad\qquad +ax+10 \\
 & \underline{2x^3-6x^2+2bx} \\
 & 6x^2+(a-2b)x+10 \\
 & \underline{6x^2 \quad -18x \quad +6b} \\
 & (a-2b+18)x+(10-6b)
\end{array}$$

したがって，余りが $3x-2$ であるので，

$$a-2b+18=3,\qquad 10-6b=-2$$

から，$a,\ b$ を求めても構いません.

37 基本的な考え方は **36** と同じです．3 次式が 2 次式で割り切れるので，(1) は

$$x^3+lx^2+mx+2=(x^2+2x+2)(ax+b)$$

(2) は

$$x^3+lx^2+m=(x+2)^2(ax+b)$$

となります．展開して係数比較して終わり．う〜ん，何にも面白くない！

38 3 次式を 2 次式で割ると商は 1 次式です．つまり，もとの式は

$$(x^2+1)(ax+b)+2x+3$$

または

$$(x^2+x+1)(cx+d)+3x+5$$

と表せます．両者は同じ式なので，

$$(x^2+1)(ax+b)+2x+3=(x^2+x+1)(cx+d)+3x+5$$

が成立．係数比較して終わり．あ〜，つまんね〜．

39 これは大事．ホントに大事．マジで大事．
後ほど，『図形と式』の章でも登場しますが，図形的なイメージをもつことが大切です．

$$(k+1)x-(2k+3)y-3k-5=0$$

この式は直線を表しています．「どのような k に対しても成り立つような x，y の値」とは，「この直線が k の値に関わらずに必ず通る点」ということです．
k について整理し，k についての恒等式と考えます．つまり，

$$(x-2y-3)k+(x-3y-5)=0$$

どのような k に対しても成り立つので，これを k の式とみなしたときの k の係数が 0，つまり，

$$x-2y-3=0, \quad x-3y-5=0$$

これを解けば，x と y の値が分かりますね．

40 2 文字になっても基本は同じ．係数比較してください．
2 文字の恒等式って，何の意味があるねん，って思う人は以下の ✎注 をお読みください．

✎**注** もう一度，振り返ると，

$ax^2+bx+c=0$ が恒等式

とは，どんな x についても 0 になる，つまり

$\boxed{y=ax^2+bx+c \text{ が } x \text{ の関数として } 0 \text{ に一致}}$

ということなので，関数 y が x 軸に一致するに他ならないから，全ての係数が 0，つまり，$a=b=c=0$ になります．
2 文字の式はどう解釈するべきか？

$ax^2+bxy+cy^2=0$ が恒等式

とは，どんな x，y についても 0 になる，つまり

$\boxed{z=ax^2+bxy+cy^2 \text{ が } x,\ y \text{ の関数として } 0 \text{ に一致}}$

ということです．関数 $z=ax^2+bxy+cy^2$ は xyz 空間内の曲面を表しています．この関数が「すべての $(x,\ y)$ について 0 になる」とは，この曲面が xy 平面に一致することに他なりません．なので，全ての係数が 0，つまり $a=b=c=0$ となるのです．

41 $x+y=1$ より $y=1-x$ として代入して整理すると

$$(a+b)x^2+(-2b+c)x+b=1$$

となるので，係数比較して

$$a+b=0, \quad -2b+c=0, \quad b=1$$

より，$a=-1$，$b=1$，$c=2$ と決定します．おしまい．
✎**注** この解答が理にかなっていることを確認しておきましょう．
$a=-1$，$b=1$，$c=2$ のとき，

$$-x^2+y^2+2x=1$$

となりますが，この式を図示できますか？
実はこの式は次のように因数分解できます．
$x^2-2x+1-y^2=0$
$(x-1)^2-y^2=0$
$(x-1+y)(x-1-y)=0$
$\therefore\ \ x-1+y=0,\ x-1-y=0$
つまり 2 つの直線を表しています．
したがって，問題文 $x+y=1$ を満たす $(x,\ y)$ に対して常に成立する理由が明確になりました．