第5章　指数関数と対数関数

2　指数関数

$\boxed{338}$ (1)〜(4) のグラフを全て同じ座標平面にかいてみよう．(1) のグラフを基準として、(2)(3)(4) のグラフがどのような位置関係になるのか，式の意味と共に確認しておこう．例えば (2) は (1) の y を $-y$ に入れ換えたものだし，(3) は (1) の x を $-x$ に入れ換えたものです．(4) も $\dfrac{1}{4}=4^{-1}$ なので・・・

$\boxed{339}$ グラフを書かずに y の範囲を考えたいところ．指数関数 $y=a^x$ のグラフは単調増加か単調減少の 2 種類しかありません．その違いを生むのは底 a が 1 より大か小かということです．

$\boxed{340}$ 指数関数のグラフをイメージして考えます．(1) は $64=2^6$, $128=2^7$, $256=2^8$ なので全て $2^{\bigcirc}$ の形になるので $y=2^x$ のグラフをイメージします．(2) はもともと $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\bigcirc}$ の形でそろっているので，$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ のグラフをイメージします．あとは，それぞれのグラフが単調増加なのか単調減少なのかを考えれば，大小関係は分かります．

$\boxed{341}$ 指数方程式，指数不等式の基本．まずは両辺を指数の形で書き直します．方程式の場合は

$$2^x=2^y \iff x=y$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^y \iff x=y$$

と指数部分がそのまま一致しますが，不等式だとちょっと問題があります．

$$2^x<2^y \iff x<y$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^y \iff x>y$$

底が 1 より大か小かによって不等式の向きが変わってきます．

$\boxed{342}$ $\boxed{342}$ のちょっと応用問題．両辺の底を共通にして指数部分の比較ができるようにしてください．

$\boxed{343}$ $\boxed{338}$ の応用．一言でいえば平行移動が加わってきます．
(1) は $y=3^x$ のグラフの x の代わりに $x+1$ としたもの．
(2) は $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ のグラフの x の代わりに $x-1$ としたもの．
(1) は $y=3^x$ のグラフの y の代わりに $y+1$ としたもの．
です．それぞれどのように平行移動したものなのでしょうか．

$\boxed{344}$ $\boxed{340}$ の大小比較は底をそろえましたが，今回は底をそろえることはできないようです．ならば指数部分をそろえるしかなすすべがありません．
(1) は

$$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=(3^2)^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$$

(2) は

$$2^{30}=(2^3)^{10}$$

$$3^{20}=(3^2)^{10}$$

などとします．
いずれにせよ大小比較は「基準を統一すること」が大切です．

$\boxed{345}$ 指数方程式，不等式の応用．ですが，置き換えをして考えれば単なる 2 次方程式，不等式の問題になります．注意すべき点は，a^x の値は常に正だということです．置き換えして出てきた値が負の数になれば全てアウトです．

$\boxed{346}$ これも置き換え．当然ながら置き換えた文字の範囲で最大最小を考えます．

$\boxed{347}$ これまた置き換え．今度は連立方程式になっているだけで $\boxed{345}$ と本質的に同じ．

$\boxed{348}$ 重要問題．今後も頻繁にお目にかかることでしょう．基本的にはこれまでと同様に置き換えして考えますが，何を置き換えするのか，をまず考えねばなりません．パッと見，$2^x = t$ とおきたくなりますが，$2^{-x} = \dfrac{1}{t}$ となって結果的にものすごく大変な式になります．

ここは 2 つまとめて $2^x + 2^{-x} = t$ とおくのがポイント．さて，このとき t の範囲はどのようになるか．$2^x + 2^{-x}$ が逆数の和になっていること，また $2^x > 0$，$2^{-x} > 0$ であることなどから使う道具は決まってきます．
次に注意したいのが $4^x + 4^{-x}$ を t で表すこと．$4^x + 4^{-x} = t^2$ とカン違いする人が結構多くいます．んなわけないでしょう．