第５章　指数関数と対数関数

3　対数とその性質

349 指数と対数の相互関係

$$a^p = M \iff p = \log_a M$$

に従うだけ．単なる手の運動やな．つま～んな～い．

350 いずれの問題も，対数の基本法則

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

を利用するだけ．特に，

$$\log_a a^p = p$$

であることはとても重要です．
(6) は底よりも真数のほうが小さいので少し戸惑うかもしれませんが，底の変換公式から導かれる次の公式

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{（底と真数の入れ換え公式）}$$

を利用すれば，(1)～(4) の場合と同様に求めることができるはず．
(7) は当然 $0.2 = \dfrac{1}{5}$ と解釈して底の変換公式を利用したほうが分かりやすいでしょう．
(8) も同様に，いろいろガチャガチャすればできるでしょう．

351 対数計算の基本法則

$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$$

$$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

に従います．**対数計算は自分で何回もやってみて自分なりのコツをつかむしかありません**．犬プリでも紹介したように，**計算の進め方には「あげ派」「さげ派」「あげさげ派」の３流派があり，どの流派で計算するかは各自の自由**です（どの流派でも計算できる）．
(1)(2) は，公式一発で終わり．(3)(4) は「あげ派」，(5) は「あげさげ派」，(6) は「さげ派」かな～．犬プリで似たような問題を解説してあるので，そちらも見といてください．

352 底の変換公式とは，**底を自分の都合の良い底に変えるための公式**にすぎません．
(1)～(3) は，底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

をそのまま利用するタイプ．底を何に変換するかはオマカセ．何でも OK です．でもまあ計算をスリムにするなら，出てくる数字を観察すれば何にそろえるかわかってくると思います．
(4)～(6) は底をそろえて計算してもできますが，底の変換公式の分母をはらった式

$$\log_c a \times \log_a b = \log_c b$$

を利用すれば一気に解決するでしょう．**左辺部で，最初の項の真数である a と次の項の底である a とが打ち消しあっている**ことが分かります．この感覚はとても大切なのです．ベクトルの加法的なイメージですね．これも犬プリで解説してあります．

353 $\boxed{352}$ の (4)～(6) の計算を文字に置き換えただけ．犬プリ参照．

354 (1) は $\boxed{352}$ (4)～(6) や $\boxed{353}$ と同様．底をそろえてもよいし，ベクトルの加法的なイメージでも OK．
(2) は犬プリで解説してあります．底を何でそろえるのかな？
(3) は (1) との違いを意識しよう．ベクトルの加法的なイメージはムリなので，底をそろえるしかありません．
(4) は質問が多い問題．これも底を 2 か 5 に一気にそろえようとすると，かえってわけわかんなくなります．$10 = 2 \times 5$ であることに注目（この感覚は後の常用対数でも頻繁に出てきます）．つまり，

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \times 5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5$$

$$\log_5 10 = \log_5 (5 \times 2) = \log_5 5 + \log_5 2 = 1 + \log_5 2$$

と考えます．これらを式に代入して計算すると・・・お見事！うまくいきます．

355 それぞれの対数の真数部分を素因数分解するだけ．(4) は底が 4 なので，当然，底を 2 に変換する必要があるでしょう．なお，a と b のどちらも使うとは限りませんよ．

356 355 と同様の計算を文字に置き換えただけやな．

357 まずは，$\log_{20} 80$ を底が 2(または 3) に直すことから始まりますね．底の変換公式をつかって計算をすすめると，ある対数の値に行きつきます．その対数を a と b を用いて表すのです．詳しくは，この問題も犬プリで紹介済みですので，そっちを見てください．

358 くれぐれも，

$$\begin{aligned}&\log_{16}\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)\\ =&\log_{16}\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)-\log_{16}\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)\end{aligned}$$

とやってはいけません．結構多いんですよね，こうしちゃう人が．対数は和や差でバラすことはできません．絶対にダメです．
となれば，まずは，真数部分の 2 重根号をはずすことから始めます．つまり，$\sqrt{5\pm\sqrt{24}}=\sqrt{5\pm2\sqrt{6}}$ ですから，簡単にはずれますね．2 重根号のはずし方を知らない人は，数学 I の教科書見て復習しといてください．
真数部分が計算できれば，あとは 350 の (8) みたいなノリでできると思います．

359 これも質問が非常に多い問題．まずは，

$$a^{\log_a M}=M$$

であることを理解しましょう．この式は，指数と対数の相互関係

$$a^p=M \iff p=\log_a M$$

より，$a^p=M$ の p のところに，$p=\log_a M$ を代入しただけです．例えば，

$$10^{\log_{10} 3}=3$$

つまり，指数の底 10 と対数の底 10 をそろえることがポイント．次の例では 100 と 10 がそろってないので，まずはここをそろえることから始めます．当然ながら小さい方 (つまり 10) にそろえます．

$$\begin{aligned}100^{\log_{10} 3}&=(10^2)^{\log_{10} 3}=10^{2\log_{10} 3}\\&=10^{\log_{10} 3^2}=10^{\log_{10} 9}=9\end{aligned}$$

このコツをつかめば簡単です．例えば (2) の場合は，

$$10^{1+\log_{10} 3}=10^1\times10^{\log_{10} 3}=10\times3=30$$

となります．

360 上の例題 35 を参照すればできますが，いまいちイケてない解答です．
この例題の模範解答では，条件式の対数をとってから $=k$ と置いているのですが，逆に，最初に

$$2^x=5^y=10^{\frac{z}{2}}=k$$

とおいてから，対数に直すとスッキリした解答になります．つまり，

$$x=\log_2 k,\ \ y=\log_5 k,\ \ \frac{z}{2}=\log_{10} k$$

ここから，それぞれの逆数 $\dfrac{1}{x}$ や $\dfrac{1}{y}$ や $\dfrac{2}{z}$ を作っていきます．底と真数を入れ換えると逆数になるという重要事項

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\quad\text{(底と真数の入れ換え公式)}$$

を用いると，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\log_2 k}=\log_k 2\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_5 k}=\log_k 5\\ \dfrac{2}{z}=\dfrac{1}{\log_{10} k}=\log_k 10\end{cases}$$

となるので，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{z}$ が成立するのは明らかです．.
なお，答案をつくる際には，真数や底に関する条件を詳細に書く必要があります．何も意識せずに上の内容をそんまま記述すると大幅原点されるでしょうね．何を根拠に，何を書くべきなのかわからない人は，この解答を真似るべきではありませんね．