第5章　指数関数と対数関数

4　対数関数

犬プリ『対数関数のグラフとその周辺』に全て書いてあるので，それをじっくりと読もう (見よう).

361 犬プリでは，$y = 2^x$，$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y = \log_2 x$，$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフの位置関係を紹介しましたね．全く同様です．しっかりと区別して書けるようにしておいてください．

362 対数関数のグラフは単調増加か単調減少のどちらかなので，ある区間における対数関数の最大最小は必ずその区間の両端に現れます．単調増加か単調減少かの区別は，底が 1 より大か小かで決まるのでした．

363 モノを比較するには基準をそろえることが絶対条件です．対数の値を比較するには底をそろえればよいのです．なぜなら，対数関数のグラフより，底が 1 より大なら単調増加なので，対数の大小関係と真数の大小関係は同じで，底が 1 より小なら単調減少なので，対数の大小関係を真数の大小関係は異なるからです．なお，普通の数 p を対数の形で (わざわざに) 表現するには $p = \log_a a^p$ を使います．

364 前問同様，物事を比較するには基準をそろえる必要があります．この場合の基準は底をそろえるということ．まずは底の変換公式を利用して底をそろえることからスタート．底を何でそろえればよいか，は経験がモノを言いますが，得てして小さい数でそろえるとうまくいく場合が多いようです．
底がそろえば $\boxed{363}$ に同じ．

365 最も単純な対数方程式・不等式の問題．名言「なにはともあれ真数 > 0」は常識としておきたいところ．まずは，両辺を対数の形で書き直し，両辺の対数の真数部分を比較する．あくまでも真数部分の比較であって，log を勝手に付けたり外したりしているのではないことを意識しよう．なお，当然ながら，不等式では底が 1 より大か小か向きに変化が生じるので注意が必要です．一言，断ってから対数を外すことをオススメします．

366 対数関数のグラフに限らず，$y = f(x)$ のグラフを描く際には，定義域 (x の範囲) と値域 (y の範囲) を常に意識することが重要です．その上で，次の移動の基本を確認しよう．なぜ，このようになるかは「軌跡」の考えに基づきます．今回は説明を省略しますが，興味のある人は証明を考えてみよう．

> ☆グラフの基本移動☆
> ① グラフの平行移動
> $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフは，
> $$y - q = f(x - p)$$
> である．
> ② グラフの対称移動
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | x 軸対称移動 | ： | y の代わりに $-y$ を代入 |
> | y 軸対称移動 | ： | x の代わりに $-x$ を代入 |
> | 原点対称移動 | ： | x の代わりに $-x$ を，y の代わりに $-y$ を代入 |

今回のグラフは，いずれも，基本のグラフを平行移動や対称移動したグラフです．上の基本事項を頭に入れて，どんなグラフを，どのように移動したものなのかを考えよう．犬プリにも少し紹介してあるので，そちらも参照のこと．真数 > 0 を意識しよう．出来上がったグラフが，真数 > 0 となる x の領域にちゃんと含まれているかどうかを確認せねばなりません．特に，(1)(2) はいい加減に書くと絶対に間違うので，最初に x の範囲を点線などで明示しておくと良いでしょう．

367 $\boxed{363}$ や $\boxed{364}$ と同じかと思えば，さにあらず．少しマニアックな大小比較です．犬プリでも紹介しましたが，(1)(2) では，真数が同じで底が異なります．よって，真数と底の入れ換

え公式

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

を利用すれば，逆に底が同じになり比較可能となります．なお「分母が大きいほうが逆数にすると小さくなる」と考えると間違います．

$$A < B \Longleftrightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{B}$$

は A と B が同符号の場合にのみ成立するので注意しよう．
(3) は何とかなるでしょう．対数の比較というより指数の比較ですね．
(4) も犬プリで紹介しました．これが一番マニアックです．

368 対数方程式の基本問題．まずは，兎にも角にも「なにはともあれ真数 >0」．次に底がそろっているか確認し (そろってなければ「変換公式」でそろえる)，計算法則に基づいて変形します．そして次の関係

$$\log_a M = \log_a N \iff M = N$$

を利用します．

369 対数不等式の基本問題．しばらくの変形は方程式に同じです．つまり，兎にも角にも「なにはともあれ真数 >0」．次に底がそろっているか確認し (そろってなければ「変換公式」でそろえる)，計算法則に基づいて変形します．そして次の関係
$a>1$ のとき，

$$\log_a M < \log_a N \iff M < N$$

$0<a<1$ のとき，

$$\log_a M < \log_a N \iff M > N$$

を利用します．底が 1 より大か小かで不等号の向きが変わることに注意しよう．
なお，この関係を単純に「真数 $\log_a$ を付けたり外したりしてるだけやん」と思わないでください．あくまでも「対数の値の大小関係」と「真数の大小関係」の比較であることを意識すること．

370 意外と質問の多い問題．上の例題 36 の (1) と全く同じなのですが，例題の解答中「よって」の後が分からない人が多いようです．$\log_2 3$ は見た目が変わっているだけで単なる数字なんですけどねえ．つまり，上の例題 39(1) を解説すると，両辺に $\log_2$ を付けて，

$$x = (x-1)\log_2 3$$

で，$\log_2 3 = A$ とでも置けば

$$x = (x-1)A$$

これを x について解くだけです．
(1) も (2) も両辺に適当な対数を付けて，適当に変形すれば上のような形にもっていけると思います．

371 重要な問題．今回の問題では

$$(\log_a x)^2 \text{ と } \log_a x^2 \text{ は全く違う}$$

ことがポイント．$(\log_a x)^2$ はこれ以上計算を進めることが不可能であるので，この形がきたら $\log_a x = t$ とでもおいて，$\log_a x$ をひとまとめにして考えるしか方法がありません．なお，ここで注意したいのは，x は真数なので $x>0$ ですが，t は対数の値なのですべての実数を取り得る (つまり負の数も OK) ということです．真数 >0 だから $t>0$ と考える人が非常に多いのです．
(2)(3) は底が異なるので，もちろん底をそろえることもお忘れなく．

372 もうここまでくれば，問題を見ていきなり log を外したりする人はいないでしょう．まずは「なにはともあれ真数 >0」に従い，真数条件を確認すること．次に，底が 1 より大か小かで向きに変化が生じるので，まずは，底 a が $a>1$ の場合と $0<a<1$ の場合で場合わけをする必要があります．

373 対数の最大最小問題ですが，今回の問題においても

$$(\log_a x)^2 \text{ と } \log_a x^2 \text{ は全く違う}$$

ことがポイントになります．$(\log_a x)^2$ はこれ以上計算を進めることが不可能であるので，この形がきたら $\log_a x = t$ とでもおいて，$\log_a x$ をひとまとめにして考えるしか方法がありません．なお，今回の問題は，すべて 2 次関数の最大最小問題に帰着されます．

(2) に悩むかもしれません．

$\left(\log_2 \dfrac{4}{x}\right)\left(\log_2 \dfrac{x}{2}\right)$ を計算することはできないですからね．どうしようもないです．じゃあ，どうするか．$\log_2 \dfrac{4}{x}$ と $\log_2 \dfrac{x}{2}$ のそれぞれを適当にイジるくらいしかできることはないですね．

$$\log_2 \frac{4}{x} = \log_2 4 - \log_2 x = 2 - \log_2 x$$

$$\log_2 \frac{x}{2} = \log_2 x - \log_2 2 = \log_2 x - 1$$

つまり，

$$\left(\log_2 \frac{4}{x}\right)\left(\log_2 \frac{x}{2}\right) = (2 - \log_2 x)(\log_2 x - 1)$$

これを，展開すれば (1) と同じ形式になるでしょう．

当然ながら，最大最小問題では変数の範囲が重要な意味をもつので，文字の範囲をきっちりと確定する必要があります (特に (3))．

$\boxed{374}$ いうまでもなく，「なにはともあれ真数 > 0」に従い，真数条件を確認すること．このことから x の範囲が決まります．この範囲内で最大最小を考えればよいのです．

今回の場合，$\boxed{373}$ のような置き換えはできません．

では，逆にできることは何か？　それは対数の計算法則より，

$$y = \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}}(6-x) = \log_{\frac{1}{3}} x(6-x)$$

くらいしかありませんね．となれば，真数部分 $x(6-x)$ に注目して，この部分の最大最小を考えればよさそうです．底が 1 より小さいことに注意しよう．真数の大小と対数の大小が入れ代わります．

なお，くれぐれも，

$\log_{\frac{1}{3}}(6-x) = \log_{\frac{1}{3}} 6 - \log_{\frac{1}{3}} x$

としないように．

$\boxed{375}$ 難しいですが重要な問題です．不等式の証明問題のポイントは

① 必ず下書きをしてから本番の解答を書くこと

② 必ず「証明の型」通りの答案を書くこと

③ 結論から話を始めないこと．

です．「証明の型」とは，例えば $A \geqq B$ を示す場合，

$\boxed{\text{不等式の証明の型 ①}}$

(左辺) − (右辺) を式変形して最後に 0 以上であることを示す．

$$\begin{aligned} &A - B \\ =&\cdots\cdots \\ =&\cdots\cdots \\ =&\cdots\cdots \\ \geqq&0 \\ \therefore &A \geqq B \end{aligned}$$

$\boxed{\text{不等式の証明の型 ②}}$

(左辺) をそのまま変形していき，最終的に (右辺) 以上であることを示す．

$$\begin{aligned} &A \\ =&\cdots\cdots \\ =&\cdots\cdots \\ =&\cdots\cdots \\ \geqq& \\ \therefore &A \geqq B \end{aligned}$$

の 2 つの型が基本です (実はもう 1 パターンあるのだが，ここでは紹介しない)．いずれにしても，$A \geqq B$ という結論を最初に書かない，ということが重要で，$A \geqq B$ を証明するのが目的ですから，$A \geqq B$ から証明をスタートさせては本末転倒なので絶対にダメです．

この問題では，もう一つ重要なポイントがあります．

☆相加相乗平均の大小関係☆

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，

$$x + y \geqq 2\sqrt{xy}$$

が成立する．なお，等号が成立するのは

$x = y$ のとき．

特に，**逆数の和の形がきたら相加相乗平均の大小関係を用いることは常識**としておきたいところ．
なお，この問題も犬プリで紹介しましたのでそちらを見てください．なかなか，こんな答案をサクサクとは書けないけどね．自分で答案を作成したら，一度見せに来てください．論理に破綻がないか確認します．

376 (1)(2) 共に，log のついた式と log のついてない式の連立方程式なっていることに注意しましょう．
この問題の解くコツは，**連立する式のどちらも log のない式にするか，連立する式のどちらも log のある式にするか**，です．どちらの形にするかは，これまでやってきた log 計算の雰囲気を感じればわかるはず．
例えば (1) の場合，

$$\begin{cases} \log_{10} x + \log_{10} y = 2 \\ x + y = 25 \end{cases}$$

ですが，どちらも log のついた式にしようと思って 2 つ目の式の両辺に log を付けても何ともなりません．$\log_{10}(x+y) = \log_{10} 25$ となるだけで左辺部分がどうしようもありません (くれぐれも左辺部を $\log_{10} x + \log_{10} y$ と展開しないように！)．しかし，1 つめの式に注目すると，$\log_{10} xy = 2$ と変形でき，$xy = 10^2 = 100$ となるので log のない式になります．つまり，

$$\begin{cases} xy = 100 \\ x + y = 25 \end{cases}$$

という連立方程式になるのです．これは問題なく解けます．
(2) の場合，

$$\begin{cases} x^2y^4 = 1 \\ \log_2 x + (\log_2 y)^2 = 3 \end{cases}$$

ですが，2 つ目の式がすでにどうにもなりません．2 つ目の式の左辺部を変形することは不可能です．$(\log_2 y)^2$ の形は変形が無理．やる気をくじく最悪な形です．つまり 2 つ目の式から log を外すことはできません．逆に，1 つ目の式に log を付けると (2 つ目の式に合わせて $\log_2$ を付ける)，$\log_2 x^2y^4 = \log_2 1$ より，$2\log_2 x + 4\log_2 y = 0$ と計算が前に進みます．よって，結果的に 2 つの式ともに $\log_2$ が顔を出すわけですが，ここで，$\log_2 x = X$，$\log_2 y = Y$ と置きかえれば，

$$\begin{cases} 2X + 4Y = 0 \\ X + Y^2 = 3 \end{cases}$$

という連立方程式になります．これも問題なく解けます．X，Y が求まったら，最後に x，y に戻します．
なお，前にも述べましたが，x と y は真数なので，$x > 0$，$y > 0$ ですが，X と Y は対数の値なので全ての実数を取り得る (つまり負の数も OK) ということです．真数 > 0 だから $X > 0$，$Y > 0$ と考える人が非常に多いのです．注意しましょう．

377 みんなが苦手な不等式の証明問題．
まずは，375 でも紹介したポイントに従うこと．
もう一度述べると，不等式の証明問題のポイントは
① 必ず下書きをしてから本番の解答を書くこと
② 必ず「証明の型」通りの答案を書くこと
③ 結論から話を始めないこと．
です．
(1) はとりあえず，底をそろえてみると

$$\log_p q + \frac{1}{\log_p q} \geqq 2$$

となります．左辺部が逆数の和になっていることに注目．**逆数の和とくれば相加相乗平均の利用**です (これは常識)．じゃあ，簡単やんけ～と思うかもしれませんが，ちょっと待ってください．相加相乗平均を利用するには条件があります。それは

相加相乗平均は正の数のときにのみ使える

ということ．はたして今回の $\log_p q$ は正の数であると簡単に言ってしまって良いのでしょうか？？？**きちんと確認する必要がありますね．**

(2) は一見すると何の手がかりもなく困ってしまいます．とりあえず両辺をイジくってみようと試みても，なかなか変形できないことに気づくと思います ($\boxed{329}$ (3) と同じ感じ)．そこで，右辺部分のそれぞれの (　) 内に注目して，そのなかをイジくってみましょう．

$$\begin{aligned}
\text{右辺部分} &= \left(\log_{10}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(\log_{10}\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\log_{10}\frac{b}{a}\right)\times\frac{1}{2}\left(\log_{10}\frac{a}{b}\right) \\
&= \frac{1}{4}(\log_{10} b - \log_{10} a)(\log_{10} a - \log_{10} b)
\end{aligned}$$

つまり

$$(\log_{10} a)(\log_{10} b) \geqq \frac{1}{4}(\log_{10} b - \log_{10} a)(\log_{10} a - \log_{10} b)$$

を示せばよいことがわかります．さて，次にどうするか？この形から判断して，**置き換えするしか方法がありません**ね．つまり，$\log_{10} a = A$，$\log_{10} b = B$ とでもおいて，

$$AB \geqq \frac{1}{4}(B-A)(A-B)$$

を示せばよいのです..

この問題でも，**答案の書き方に注意**しましょう．「証明の型」に従って，絶対に**結論の式を最初に書かないこと**．これも各自で証明の答案を書いたら，僕のところに見せに来てください．論理の破綻がないかチェックさせていただきます．

$\boxed{378}$ $\boxed{376}$ (1) と同じような感じをもつこと．つまり条件式が $x+2y=8$ で，考える対象が $\log_{10} x + \log_{10} y$．つまり片方だけに log がある状態になっています．なんとかせねば！

$$\log_{10} x + \log_{10} y = \log_{10} xy$$

と変形できることに注意しましょう．つまり，

$$\begin{aligned}
&\log_{10} x + \log_{10} y \text{ が最大になる} \\
\Longleftrightarrow\ &\log_{10} xy \text{ が最大になる} \\
\Longleftrightarrow\ &xy \text{ が最大になる}
\end{aligned}$$

なので，**xy の最大値を考えるだけでよい**のです．となれば，数学 I の 2 次関数の問題に帰着されます．

なお，x と y の範囲に注意してください．$x>0$，$y>0$ という範囲は本当の範囲ではありません．**真の範囲は見えないところに隠されています．**

なお，$\boxed{374}$ と同じような状況になっていることを意識しておこう．