第5章　指数関数と対数関数

5　常用対数

この章のポイントは，犬プリ『常用対数の利用』に全て書いてあるので，まずはそれをじっくり読もう (見よう).

379 100000 や 0.0001 や 0.000001 を 10^n の形に書けますか，というだけの問題．0 の個数を数え間違えないでね.

380 常用対数表には $\log_{10} 1.00$ から $\log_{10} 9.99$ までの値しか載ってないから，真数を 1.00 から 9.99 までの形で表現し直さねばなりません．例えば (2) の場合，$37200 = 3.72 \times 10^4$ などとします.

381 今度は，常用対数表を用いずに $\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ の値だけを利用するのですから，いずれも，真数部分を素因数分解して，$\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ で表すことです．355 や 356 でやったことが，こういう問題で活かされるのでしょう.

382 桁数を求める問題は，典型的なパターン問題なので，絶対にできてほしい．やり方を忘れてしまった人は，具体的な桁数 (例えば 3 桁の場合など) で実験してみて規則性を把握することです．犬プリも参照のこと.

383 「小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか」という問題も典型的なパターン問題です．上の例題 38 を参照してください．よく意味がわからない人は具体的な場合 (例えば小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れる場合など) で実験してみて規則性を把握することです．犬プリも参照のこと.
(3) は $\log_{10} 6$ の値が必要になりますが，$\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ から $\log_{10} 6$ の値を作ることができます (これも犬プリに書いてあります).

384 (1) は，お小遣いの問題 (2 倍 2 倍に増えていく例のやつ) に似ていますね．不等式の両辺に $\log_{10}$ を付けて計算するだけ．簡単.
(2) は犬プリに紹介してありますので，そちらを参照のこと．この問題はわりと重要ですね.

385 この問題もわりと重要．これも類題を犬プリで紹介しました．そちらを参照のこと．しかし，犬プリでは「常用対数表を用いて」となっていましたが，この問題では常用対数表を用いずに，与えられた対数の値だけを利用して考えよ，という点に注意すること．与えられているのは，$\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ と $\log_{10} 7$ だけ.
じつは，$\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ の 2 つの値が分かっていれば，$\log_{10} 4$ と $\log_{10} 5$ と $\log_{10} 6$ と $\log_{10} 8$ と $\log_{10} 9$ の値がすべて求めることができます．つまり，$\log_{10} 7$ と合わせて，

$$\log_{10} N \quad (N = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$$

の値が全て確定するのです．こっちの方が重要かもね．やってみてください.

386 現在の経済状況を無視した実に腹立たしい問題ですね．今の景気だと，年利 5 %なんて絶対にありえません．100 万円を定期預金しても年利息は 0.025 %程度です．100 万円を 1 年間預けても利息 250 円なんですよ．ショボイ〜．あ〜，実にムカツク問題やからやらなくてよろしい．ていうか，問題を読むだけで式ができてしまうし．「元利合計は $10(1.05)^x$ で，元利合計が 15 万円を超えるのは何年後」って

$$10(1.05)^x > 150000$$

そのまんまやないか．お小遣いの問題と同様．あ〜つまらん.

387 今度は花粉症対策の問題ですか．花粉症じゃない僕にとってはどうでも良い問題です．まあ，でも一応やっておきましょうかね．1 枚で 70 %除去できるということは，花粉が 30

%残る，つまり 0.3 倍になるということ．2 枚重ねれば，さらに 70 %除去だから，合わせて 0.3×0.3 倍になります．では x 枚重ねると花粉はどれだけになるのかな？それが結果的に 99.99 %除去，つまり 0.01 %の残量に以下になればよいんだから，式はたちますよね．

388 上の例題 39 の方法を真似るだけですが，例題 39 と違って与えられた対数の真数が，小数になっているところがイヤラシイ問題．まずは整数に直そう．つまり

$$\begin{aligned}&\log_{10} 14\\ =&\log_{10}(1.4 \times 10)\\ =&\log_{10} 1.4 + \log_{10} 10\\ =&0.146 + 1\\ =&1.146\end{aligned}$$

$\log_{10} 18$ と $\log_{10} 21$ も同様にして求めれば，やっとこさ例題 39 と同じ問題になります．

389 いわゆる背理法の問題．**背理法とは，結論を否定して矛盾が生じることを示す証明方法**で，$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明でもお馴染みです．本問の場合は，$\log_2 3$ が有理数であると仮定して矛盾が生じることを示しましょう．有理数とは既約分数の形 $\dfrac{n}{m}$ でかける数のことでした．つまり，

$$\log_2 3 = \frac{n}{m}$$

といいて矛盾を示すのですが，「何に」矛盾するのでしょうか．次の 2 つの有名事実がポイントとなります．

▷Point◁

① 素因数分解の一意性．
　⟶ 整数はただ一通りに素因数分解できること (積の順番は無視)．

② 有理数は四則演算で閉じている．
　⟶ 有理数を四則演算しても有理数であること．

この 2 つは証明なしで用いてよい「常識」です．
自分で証明ができたら僕に見せに来てください．論理に破綻がないかチェックします．

参考 1986 年の大阪大学の入試で「$\log_3 4$ が無理数であることを証明せよ」という問題が出題されてました．4STEP の問題だからといって侮れませんね．