第6章　微分法と積分法

第2節　導関数の応用

3　接線

☆この章のポイント☆
犬プリ『接線の話』に全て書いてあるので，それをじっくりと読もう（見よう）.

$\boxed{406}$ 基本かつ超重要問題．この問題は必ずマスターしなければなりません．
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ なので，接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

です．この公式に代入するだけ．犬プリ『接線の話』でも紹介してあります．

$\boxed{407}$ この問題も基本かつ超重要問題．この問題は必ずマスターしなければなりません．前の $\boxed{406}$ としっかり区別すること．「曲線上の点 A における接線」と「点 A を通る接線」とは全く異なります．**接線（つまり直線）は通る点と傾きで決定**します．傾きは接点で決まります．よって，まずは**接点（の x 座標）を自分で設定する**ことから始まります．

まずは，セッテンセッテー（接点設定）

です．犬プリ『接線の話』でも紹介してあります．
$\boxed{406}$ と $\boxed{407}$ は何度も何度も解いて解法を確実に定着させよう．

$\boxed{408}$ これも，まずは**セッテンセッテー（接点設定）**しましょう．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ なので，$f'(a)=9$ となる a を求めるのです．a はすなわち接点の x 座標なのですから a が求まれば接線の方程式も決定します．

$\boxed{409}$ 重要な問題です．上の例題 41 を参照してください．まずは接線の方程式を求めます．曲線上の点における接線ですから $\boxed{406}$ と同様に簡単に求められます．で，この接線がこの曲線と交わるもう 1 点を求めるのですから，つまり，**接線と曲線の共有点を求めることになるので，連立して解けば良いのです．**
なお，連立すれば当然，3 次方程式になります．この 3 次方程式の解が共有点の x 座標です．3 次方程式を解くには基本的に因数分解しか方法がありません．今回の問題ではきれいに因数分解できます．実は，どのように因数分解できるかも，事前に分かっています．詳しくは犬プリ『接線の話』でも紹介してあります．

$\boxed{410}$ **接線に垂直な直線ことを法線といいます．**
接線の傾きは簡単にわかります（もちろん $f'(a)$）．では，法線の傾きは？直角に交わる 2 直線の傾きの間にはどのような関係があるのか考えればわかるはず．通る点と傾きさえわかれば，法線の方程式はわかります．

$\boxed{411}$ 重要な問題．問題の曲線が 2 次関数ならば，直線と接するのですから，連立して判別式 $D=0$ で終了なんですが，今回の場合，3 次方程式なので判別式は使えません（判別式は 2 次方程式のみ）．では，どうするのかというと，まずは上の例題 42 を参照してください．今回の場合，次の重要事項が最大のポイントです．

☆重要☆
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=p$ で接する

$$\iff \begin{cases} f(p)=g(p) \\ f'(p)=g'(p) \end{cases}$$

つまり，**$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=p$ において y 座標が等しく，かつ，接線の傾き**

も等しいならば，$x = p$ で接するというわけ．当り前ですよね．
今回の問題でも，接点の x 座標を t とでもおいて，上の関係式を利用しましょう．

412 (1)
先ほどの 411 と同様．重要なのでもう一度紹介すると，

☆重要☆
$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = p$ で接する

$$\iff \begin{cases} f(p) = g(p) \\ f'(p) = g'(p) \end{cases}$$

今回の場合，始めから接点はわかっているので，スムーズに立式できると思います．なお，求める文字が 4 つあるので，関係式も 4 つ必要ですね．
(2)
まずは，問題文の状況を正しく把握すること．例年，この問題を正確に理解できない (読み取れない) 人が多いのです．位置関係が把握できたら，上の重要ポイントの関係式を利用します．これも，求める文字が 4 つあるので，関係式も 4 つ必要ですね．
この問題も犬プリ『接線の話』で紹介してあります．

413 まずは 2 つの放物線を図示すると，共通接線 (この場合 2 本ある) のうち 1 本は見ただけでわかります．残りの 1 本はどうやって求めましょうかね？
412 での共通接線と今回の共通接線は全然違います．**今回の共通接線は，それぞれの曲線に別々の接点で接しています．**したがって接点は 2 個，つまりそれぞれの曲線上に接点を設定せねばなりません．$x = x^2$ の点 $x = p$ における接線と $y = -(x-2)^2$ の点 $x = q$ における接線が一致すると考えます．2 つの直線の式が一致するのですから，係数を比較すれば良いですね．
この問題も犬プリ『接線の話』で紹介してあります．

414 **2 直線が垂直とくれば，傾きの積 $= -1$ です．**
この程度の問題なら，実際に交点 P の x 座標が簡単に求まるので，点 P における 2 つの曲線の接線の傾きをそれぞれ求めることができます．それらをかけて -1 になればよいのです．
ところで，もし，交点の x 座標が求めるのが困難な場合はどうしたら良いでしょうか？この先，そういう問題にきっと出くわすと思いますので，またその時に考えましょう．

415 **$f'(x)$ は，曲線 $y = f(x)$ 上の点における接線の傾きの変化を表しています．従って，$f'(x)$ の最大値，最小値が，そのまま $y = f(x)$ の接線の傾きの最大値，最小値になります．**
今回の問題でも，$y = x^3 + 3x^2 + 6x - 10$ の接線の傾きは，$y' = 3x^2 + 6x + 6$ にしたがって変化します．よって最小値をとる x はすぐにわかります．すると接線も決定しますね．あとは曲線と接線の共有点に関する問題ですから，曲線と接線を連立させて解けばよろしい．
なお，数学 III で学習する「第 2 次導関数」の意味を知っていれば，ほとんど当り前の話です．