第 6 章　微分法と積分法

第 2 節　導関数の応用

4　関数の値の変化

☆この章のポイント☆
犬プリ『3 次関数のグラフの基本』『極大値と極小値の話』に全て書いてあるので，それをじっくりと読もう (見よう).

416 問題文は「増減を調べよ」ですが，いちおう，増減表を書いてグラフまで書いておきましょう．なお，(3)(4) のグラフは微分しなくても概形は分かるようになってほしいね.

417 問題文は「極値を求めよ」ですが，いちおう，増減表を書いてグラフまで書いておきましょう．極値を求めるときは,

$x=$ ○○のとき極大値△△

$x=$ ○○のとき極小値△△

という表現で解答しましょう.

418 増減表を書いてグラフまで書いておきましょう．極値を求める際は,

$x=$ ○○のとき極大値△△

$x=$ ○○のとき極小値△△

という表現で解答しましょう.
なお，(6) は微分しなくても概形はわかるようになってほしいね.

419 4 次関数になっても基本的なグラフをかく手法は変わりません．つまり，微分して y' を求め，y' のグラフをイメージして，y' の符号変化を調べるのです．4 次関数を微分すると 3 次関数になります．つまり y' が 3 次関数なのです．よって，3 次関数 y' のグラフをイメージして，その符号変化を調べます．ここでも，3 次関数 y' のグラフを書く際，微分や増減表は不要．**x 軸との交点だけがわかればよいのです**．y' の x 軸との交点は，$y'=0$ により求まりますね

おまけ

3 次関数のグラフは微分して出てきた 2 次関数の状況を調べることで状況が把握できました．同様に，4 次関数のグラフは微分して出てきた 3 次関数の状況を調べることで状況が把握できます.
つまり，**2 次関数の状況がよくわからなければ 3 次関数のことはわからないし，3 次関数の状況がよくわからなければ 4 次関数のことはわかりません.**
「4 次関数がわからん」という人は，3 次関数の理解が不十分なのです．そういう人はまずは，3 次関数の内容を完璧にすることです．具体的に言えば，**3 次関数とそれを微分してできた 2 次関数との関係をもう一度見直すことです**．3 次関数が不十分なのに，下手に 4 次関数の手を出すべきではありません．3 次関数の内容が完璧にわかっていれば，4 次関数なんて楽勝なのですから.
大切なことは,

$$f(x) \text{ と } f'(x) \text{ との関係}$$

です．この関係の理解が最も大切なのです．でないと，3 次関数を理解したら次は 4 次関数，4 次関数を理解したら次は 5 次関数・・・とキリがありません．**$f(x)$ と $f'(x)$ との本質的な関係を理解すれば，何次関数だろうが怖くはないのです.**
早く，このような域に達してほしいと思います.

420

$$x=\alpha \text{ で極値をとる} \Longrightarrow f'(\alpha)=0$$

は成立しますが，この逆は成立しません．**つまり，$f'(\alpha)=0$ だからといって，$x=\alpha$ で極値となるとは限らないのです**．よって，$f'(\alpha)=0$ を用いて求めた答えが，本当に問題文通りの状況になっているのか，**最後に増減表を書いて確認する必要があります.**
この問題の場合，a，b を求めるのですから関係式が 2 つ必要．$x=3$ で極小値 -26 で

すから，

$$f(3)=-26,\quad f'(3)=0$$

という 2 つの式を計算する必要があります．

$\boxed{421}$ $\boxed{420}$ と同様．この問題の場合は，a，b，c，d を求めるのですから関係式が 4 つ必要．$x=-1$ で極小値 34，$x=5$ で極小値 d ですから，

$$f(-1)=34,\quad f'(-1)=0$$

$$f(5)=d,\quad f'(5)=0$$

という 4 つの式を計算する必要があります．

$\boxed{422}$ $\boxed{420}$，$\boxed{421}$ と同様．今回は，3 次関数 $f(x)$ を自分で設定するところから始まります．つまり，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とします．どのような関係式を作っていくかは，もう分るでしょう．

$\boxed{423}$ 関数 $f(x)$ のグラフの様子 (増減の様子，極値の有無) は，導関数 $f'(x)$ の符号変化の様子で決まります．$f(x)$ が 3 次関数の場合，$f'(x)$ は 2 次関数になります．つまり，2 次関数 $f'(x)$ の符号変化の様子は 2 次方程式 $f'(x)=0$ の解の様子で決まる，つまり判別式 D の符号で完全に決定します．犬プリ『3 次関数のグラフの基本』に詳しく書いてあるので，熟読してください．
なお，いきなり答案に「判別式より・・・」とは書かないでください．「求める条件は・・・なので，そのためには判別式が・・・であればよい」と，判別式がそのようになる理由をきちんと述べてください．判別式で一発に処理できるのは $f(x)$ が 3 次関数の場合だけです．それ以外の関数の場合は判別式なんて何の役にもたちませんので．

$\boxed{424}$ $\boxed{423}$ と同様．3 次関数 $f(x)$ のグラフの様子 (増減の様子，極値の有無) は 2 次方程式 $f'(x)=0$ の判別式 D で完全に決定します．犬プリ『3 次関数のグラフの基本』に詳しく書いてあるので，熟読してください．
なお，いきなり答案に「判別式より・・・」とは書かないでください．「求める条件は・・・なので，そのためには判別式が・・・であればよい」と，判別式がそのようになる理由をきちんと述べてください．判別式で一発に処理できるのは $f(x)$ が 3 次関数の場合だけです．それ以外の関数の場合は判別式なんて何の役にもたちませんので．

$\boxed{425}$ $\boxed{423}$，$\boxed{424}$ と同様．3 次関数 $f(x)$ のグラフの様子 (増減の様子，極値の有無) は 2 次方程式 $f'(x)=0$ の判別式 D で完全に決定します．犬プリ『3 次関数のグラフの基本』に詳しく書いてあるので，熟読してください．
この問題では，求まった a と b の条件式 (不等式のはず) を図示する必要があります．横軸を a，縦軸を b として平面に図示しましょう．不等式の領域を思い出してください．
なお，いきなり答案に「判別式より・・・」とは書かないでください．「求める条件は・・・なので，そのためには判別式が・・・であればよい」と，判別式がそのようになる理由をきちんと述べてください．判別式で一発に処理できるのは $f(x)$ が 3 次関数の場合だけです．それ以外の関数の場合は判別式なんて何の役にもたちませんので．

$\boxed{426}$ まずは，$y=x(x-a)^2$ のグラフの概形が微分せずにわかりますか？
$y=0$ をとくと，$x=0$ と $x=a$(重解) が得られます．つまり，このグラフは，$x=0$ で x 軸と交わり，$x=a$ で x 軸と接するのです．
当然ながら，(1)(2)(3) の場合分けの数字は，$y'=0$ の判別式の符号の分類から発生しますが，始めから概形が分かっていれば，その理由も自然にわかると思います．
それぞれの場合でグラフの形が全く異なりますので，おおよその形が把握できたら，微分して極値を求めましょう．あっ，当然ですが (1)(2)(3) の中で，極値が存在しない場合がありますよ．どの場合かはもうお分かりですね．

$\boxed{427}$ 何度も言っているように，

$$x=\alpha \text{ で極値をとる} \Longrightarrow f'(\alpha)=0$$

は成立しますが，この逆は成立しません．つまり，$f'(\alpha)=0$ だからといって，$x=\alpha$ で極値となるとは限らないのです．
従って，今回の場合，例えば (1) なら $f'(1)=0$ とするだけでは条件が不足しています．これだと「$f'(x)=0$ が $x=1$ を解に持つ」と言っているに過ぎません．$x=1$ で極大となるには，$f'(x)$ の符号が $x=1$ の前後でどのように変化すればよいのか，そのためには，どういう条件が必要なのしょうか？ $x=1$ が $f'(x)=0$ のどのような解になっていれば良いのでしょうか？詳しくは犬プリ『極大値と極小値の話』を参照のこと．

$\boxed{428}$ まずは極大値と極小値をともにもつ 4 次関数のグラフの概形をイメージしよう．4 次関数 $f(x)$ の極値の有無は 3 次関数 $f'(x)$ の符号変化の様子で決まるので，3 次方程式 $f'(x)=0$ がどのような解を持てばよいのか考えよう．$\boxed{424}$ などのように，判別式でどうこうなる問題ではありませんね．しっかりと意味を考える必要があります．

$\boxed{429}$ (1) はグラフ全体に絶対値がついています．関数の全体に絶対値がついているグラフは，中身の関数の x より下の部分を上に折り返したものです．よって，まずは中身の関数だけに注目してグラフを書けばよいのです．
(2) は，関数の一部分のみに絶対値がついています．このような場合は (1) のような考え方はできないので，真面目に場合分けして絶対値を外すしかありませんが，今回の場合は，たまたま $(x-1)^2 \geqq 0$ なので

$$y=|x+2|(x-1)^2=|(x+2)(x-1)^2|$$

と解釈でき，結果的に (1) と同じ手法で解決することになります．
ホント，たまたまなんですけどね．

$\boxed{430}$ 単純ですが非常に計算の面倒な問題です．$x=\alpha$ と $x=\beta$ で極値をもつことから，2 次方程式 $f'(x)=0$ の 2 つの解が，$x=\alpha,\ \beta$ であることが分かります．$f'(x)=3x^2+2px+q$ なので，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{2p}{3},\quad \alpha\beta=\frac{q}{3}$$

このことから逆に

$$p=-\frac{3}{2}(\alpha+\beta),\quad q=3\alpha\beta$$

となります．求める $f(\alpha)-f(\beta)$ は

$$\begin{aligned}&f(\alpha)-f(\beta)\\=&(\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r)-(\beta^3+p\beta^2+q\beta+r)\\=&(\alpha^3-\beta^3)+p(\alpha^2-\beta^2)+q(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

です．もう，お分かりですね．p と q に，$p=-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$ と $q=3\alpha\beta$ を代入して，あとはひたすら計算，計算，計算！なお，一気に展開せずに，$(\alpha-\beta)$ でくくりだして因数分解することが計算を楽にするポイントでしょう．
(2) も，ひたすら計算，計算，計算．
ところで，(1) は，この後で学習する定積分の考えを利用すれば，ほぼ暗算で一発で答えが出せます．(2) も，数学 III で学習する第 2 次導関数の意味がわかっていれば明らかなんですけどね．その秘密はまたそのうち教えます．
犬プリ『3 次関数の対称性』のプリントを参照してください．
なお，東京大学で極大値と極小値の差に関する問題が出題されています (1998 年前期).

$\boxed{431}$ 軌跡の基本に従ったごく普通の問題なのですが計算が面倒な問題です．まずは，点 A$(\alpha,\ f(\alpha))$，点 B$(\beta,\ f(\beta))$ とします．2 次方程式 $f'(x)=3x^2+6px+3p=0$ の 2 つの解が $x=\alpha,\ \beta$ なので，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-2p,\quad \alpha\beta=p$$

となります．

軌跡の基本は，軌跡を求める点を $(X,\ Y)$ とおいて X と Y だけの関係式を作ることでした．いま，線分 AB の中点 M を $(X,\ Y)$ とおけば，

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad Y=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

です．ここで，先ほどの解と係数の関係の結果を代入すれば，X と Y がそれぞれ p の式でかけます．ここから p を消去すれば，X と Y の関係式が得られます．

なお，軌跡には「制限」が付き物ですよ．この問題もそうです．実は p には条件が付きます．したがって，軌跡にも制限がかかるのです．p の範囲を忘れないように．

補足 (参考)

ところで，この問題は，極大と極小との中点が

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad Y=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

と表せることが途中の式に出てきました．ここで $\boxed{430}$ の結果を利用すれば，

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

なので，

$$Y=f(X)$$

が成立します．つまり，点 $(X,\ Y)$ が $y=f(x)$ 上に乗っかっていることが分かります．この点は，一般に『変曲点』と呼ばれる点で，曲線の凹凸に重要な役割を果たしています．3 次関数はこの変曲点に関して点対称になっています．なお，変曲点の x 座標は，2 回微分した式 $f''(x)=0$ を解けば求めれられます．