第1章　式と証明

6　等式の証明

等式の証明は，この後すぐに学習する不等式の証明と違って，かなりラクです．というのも基本的に式をテキトーにいじってたら終わるからです．

しかし，大切なのは「証明の型に従う」ということです．証明の型をしっかりと守り，独りよがりな答案にならないように繰り返し練習しよう．「証明したつもり」で終わることないよう，自分の答案を先生に見てもらってチェックを受けることが望ましいです．

例えば，等式 $A=B$ を証明するのに，「$A=B$」の式をテキトーに変形して「(左辺) = (右辺) になるので終わり」というのは絶対にやってはいけません．なぜなら，$A=B$ になることを証明するのが目的なのに，$A=B$ の式を変形して何の意味もないのです．

等式の証明では，概ね次の 3 型に従います．

▷Point◁(等式の証明の基本 3 型)

等式 $A=B$ を示すには？

① $A-B$ を式変形して 0 になることを示す．

② A を直接に変形して B になることを示す．

③ A と B をそれぞれ変形して，$A=C$ かつ $B=C$ を示す．

42 いきなりコレですか．基本 3 型のどれでやっても構いませんが，① の (左辺) − (右辺) では，ちょっと計算式が長くなるのでおススメしません．式のバランスっちゅうもんがあります．

(1) の場合，(左辺) より (右辺) の方が式が複雑です．ということは，(右辺) を式変形してそのまま (左辺) に等しくなることを示したほうが良いでしょう．

(2) と (3) の場合，(左辺) も (右辺) も式の重たさにあまり差はありません．となれば，

(左辺) = …… = ○

(右辺) = …… = ○

と，それぞれ変形し，最終的に同じ式に行き着くことを示せば良いと思います．

43 条件つきの等式の証明は，その条件をどのタイミングでどのように使うのか，が腕の見せ所．どう使ったってうまくいくんですが，どうせならカッコよく絶妙のタイミングで使いたいところ．

今回の場合，条件式が $a+b+c=0$ なので，力技でやるなら，$a=-(b+c)$ として代入して一気に計算することもできます．まあ，これはこれでできなくもない．でも，今ひとつ面白くないですね．

自分でいろいろ工夫してやってみてください．

そうそう，次の因数分解の公式は知ってますよね．念のため聞いときます．

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\=&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

エッ！知らない？．そんな人は数学 I の 4STEP **42** (2) を見といてください．

44 条件式が比例式の場合は，次のポイントに尽きます．

▷Point◁(等式の証明のコツ)

比例式は $=k$ とおけ．

(1) の場合，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$.

(2) の場合，$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと，$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$.

これらを代入して証明します．

当然ながら，証明の基本 3 型に従ってください．そのまま式の両辺に代入して終わり，としないように．

(左辺) = …… = ○

(右辺) = …… = ○

と，それぞれ変形し，最終的に同じ式に行き着くことを示せば良いと思います．

45 **44** と同様に比例式なので，$=k$ とおきます．

(1) の場合，$a=2k$，$b=3k$，$c=4k$.
(2) の場合，$a=k$，$b=3k$，$c=4k$.
となるので，代入して終わり．これは超カンタン．

46 **44** と同様これも比例式です．
(1) の場合，$3x=2y=k(\neq 0)$ とおくと，$x=\dfrac{k}{3}$，$y=\dfrac{k}{2}$.
(2) の場合，$3x=-4y=6z=k(\neq 0)$ とおくと，$x=\dfrac{k}{3}$，$y=-\dfrac{k}{4}$，$z=\dfrac{k}{6}$.
となるので，代入して終わり．これもカンタン．
なお，比例式の値 (つまり k) が 0 ではないことを意識してくださいね．ていうか，意識せざるを得ないですよね．意識せずに答えを出した人は要注意です．

47 なかなか面白い問題です．いろんな方法が考えられるでしょう．ここでもポイントは条件式の使い方です．
今回の場合，条件式が $a+b+c=0$ なので，$a=-(b+c)$ として代入して一気に計算することもできます．まあ，これはこれでできなくもないですが・・・美しくない！！
そうですねえ・・・例えば最初の項が

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{a(b+c)}{bc}=\frac{-a^2}{bc}$$

となることからピンときませんかね？他の 2 項も同じ感じで・・・そうそう，さっきも出てきたけど，次の因数分解の公式は知ってますよね．念のため聞いときます．

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\=&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

✎**注**　模範解答では，項の順番を入れ換えて実に巧妙な方法で証明しています (巻末の略解を参照のこと)．まあ，なかなか思いつかんでしょう．うまく行き過ぎてる感がします．この問題は上に紹介した 3 乗の因数分解の公式の練習を兼ねて，僕のやり方でやるのが良いかと思います．

48 とにかく比例式は $=k$ とおきましょう．

$$\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}=k$$

とおくと，

$$\begin{cases}y+z=(b-c)k\\z+x=(c-a)k\\x+y=(a-b)k\end{cases}$$

です．こういう式を見ると，本能的にやりたくなることがあるんですがね．

49 やっぱり比例式は $=k$ とおきましょう．ていうか，このパターン多いな．
$a=xk$，$b=yk$，$c=zk$ です．
代入して終わり．証明の基本 3 型にしたがってね．

50 お〜，ちょっとはオモロそうな問題かな．

$$\begin{cases}x+y+z=0\\2x^2+2y^2-z^2=0\end{cases}\Longrightarrow x=y$$

これを示すわけです．まあ，いろんな方法があるでしょうが，ベタにやるなら，結論が x と y の式なんだから，当然 z を消去したくなりますね．$z=-(x+y)$ として代入してみましょか．あ〜あ，一瞬で終わっちゃった．つまんね〜．

51 これはなかなか面白い問題．発想力が問われます．
式の対称性から，$z^2-xy=2$ になるのは至極当然な気がしますね．$x^2-yz=y^2-zx=2$ なのに z^2-xy だけ 2 じゃないなんて不自然ですし．
さて，どこから攻めるか．
条件式 $x^2-yz=y^2-zx=2$ を

$$\begin{cases}x^2-yz=2 & \cdots①\\y^2-zx=2 & \cdots②\end{cases}$$

と解釈してみましょう．こういう対称的な式を見ると，本能的にやりたくなることがあるんですがね・・・・はい，辺々を足したり引いたりします．

① − ② より，

$$x^2 - y^2 - yz + zx = 0$$

因数分解したくなるでしょ．

$$(x-y)(x+y+z) = 0$$

$x \neq y$ なので，$x+y+z=0$ となります．う〜ん，なかなか美しい．この結果は使えそうですね．
次に，① + ② より，

$$x^2 + y^2 - yz - zx = 4 \cdots ③$$

証明すべき式は $z^2 - xy = 2$ です．$x+y+z=0$ と ③ から導き出せないでしょうかね．もうちょっとヒントを出すと，③ は

$$(x+y)^2 - 2xy - z(x+y) = 4$$

となりますね．じゃあ，$x+y+z=0$ ですから ⋯．

注　この問題は，式をいろいろイジクリまわす練習だと思ってください．あーでもない，こーでもない，と自分なりにイジリまくること．

注　実は，$x^2 - yz = y^2 - zx = 2$ の $=2$ には何の意味もありません ($=2$ じゃなくても構わないということです)．模範解答は，このことを前提に証明していますが，なかなか気づきにくいと思います．あれはダメですね．やっぱりファーストチョイスは僕の解法でしょうね．

$\boxed{52}$ 言い回しがとても重要な問題．「少なくとも〜」という言い回しは数学独特のもんですからね．それぞれの言い回しを正しく解釈して，式に表すことがポイントです．
まず，

$$\begin{aligned} & xyz \neq 0 \\ \Longrightarrow\ & x,\ y,\ z \text{ が全て } 0 \text{ ではない．} \end{aligned}$$

が成立します (これは分かるやろ)．ということは，この対偶命題も成立するので，

$$\begin{aligned} & x,\ y,\ z \text{ のうち少なくとも } 1 \text{ つが } 0. \\ \Longrightarrow\ & xyz = 0 \end{aligned}$$

となります．「3 個とも 0 でない」の否定が「少なくとも 1 個が 0 である」であることに注意しよう．
したがって，(1) は，

$$\begin{aligned} & x,\ y,\ z \text{ のうち少なくとも } 1 \text{ つが } -1. \\ \Longleftrightarrow\ & x+1,\ y+1,\ z+1 \text{ のうち少なくとも } 1 \text{ つが } 0. \\ \Longleftrightarrow\ & (x+1)(y+1)(z+1) = 0 \end{aligned}$$

と解釈でき，結局，$(x+1)(y+1)(z+1)=0$ であることを示せばよいのです．
(2) は，

$$\begin{aligned} & a,\ b,\ c \text{ のどれか } 2 \text{ つの和が } 0. \\ \Longleftrightarrow\ & a+b,\ b+c,\ c+a \text{ のどれかが } 0. \\ \Longleftrightarrow\ & (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \end{aligned}$$

と解釈でき，結局，$(a+b)(b+c)(c+a)=0$ であることを示せばよいのです．
(1)(2) ともに，示すべきことがハッキリすればあとはカンタンです．証明の基本 3 型にしたがって撃破してください．