第6章　微分法と積分法

第2節　導関数の応用

5　最大値・最小値

犬プリ『最大最小の話』に全て書いてあるので，それをじっくりと読もう（見よう）.

432 3 次関数のグラフは 1 次関数（直線）や 2 次関数（放物線）とは違い，かなり面倒な形をしているので，キチンとグラフを書いて考える必要があります．くれぐれも区間の両端を代入して終わり，なんてしないように．範囲の両端の値と，極大値，極小値を正確に計算して，大小関係をつかんでください．

433 ここから 4 問，文章問題が続きますが，文章問題におけるポイントは，

① 自分で文字を設定する．

② その文字の条件（範囲）を忘れないこと．

この 2 点に尽きます．

放物線 $y = 3 - x^2$ は y 軸対称ですから，三角形 OAB は 2 等辺三角形になります．A の x 座標を a とでもおけば，B の x 座標は $-a$ になりますよね．あとは三角形 OAB の面積を a の式で表して，最大値を考えればよいのです．a の範囲をお忘れなく．

434 どっかの辺の長さを x とでもおいて，容器の体積を x で表し，最大値を考えるだけ．x の範囲をお忘れなく．

435 直円柱の表面積とは，上面と底面と側面の 3 つの合計であることに注意しよう．(1) で h を x で表せたということは，体積も x で表せるということです．x の範囲に注意して体積の最大値を考えよう．

436 まずは問題の通りに，$y = x^2$ 上の点を $(t,\ t^2)$ とでもおいて，点 $(6,\ 3)$ との距離を t の式で表そう．おそらく t の 4 次関数になると思います．面倒ですが 4 次関数のグラフを書いて最小値を見つけてください．いうまでもなく t の範囲はすべての実数です．

なお，出てきた結果から何か気づくことはないでしょうか．最小値をとる点と点 $(6,\ 3)$ を結ぶ直線の傾き，最小値をとる点における接線の傾きになにか関連性はありませんか？

437 まあ普通に，底面の半径 r，高さを h とでもおいて関係式を作りましょう．ヒントは「断面の形」と「相似形」．r と h の関係が分かれば，体積が r または h だけで表せますね．なお，ここでも文字の範囲をお忘れなく．

式を立てることは分けないと思いますが，念のためアドバイスすると，本問のような立体図形の問題を考えるときは，どっかの断面を考えたり，ある特定の方向からみたりします．

438 まずは図を書いて，立体的なイメージをつかむこと．その次に，どっかを x とおいて体積を x で表すのですが・・・たいていの人は直円柱の底面の半径を x とおくんですよね．すると，なにやら $\sqrt{\quad}$ の入ったややこしい式が完成します．$\sqrt{\quad}$ の中身に注目すれば最大値を求めることは可能ですが，ちょっと面倒です．底面の半径ではなく別のところを x とおけば，もっと簡単な式になるのですが．

439 超重要問題．範囲が固定で，関数が変化する問題です．2 次関数での苦労しましたね．その 3 次関数バージョンです．**このタイプの問題は，いくら上手に説明されても自分の頭の中で変化の様子をシュミレーションできないとダメです．**上の例題 44 も参照しよう．

犬プリ『最大最小の話』にも詳しい解説をしてあるので，そちらを見てください．

440 超重要問題．関数が固定で，範囲が変化する問題です．2 次関数での苦労しましたね．その 3 次関数バージョンです．**このタイプの問題は，いくら上手に説明されても自分の頭の中で変化の様子をシュミレーションできないとダメです．**

犬プリ『最大最小の話』にも詳しい解説をしてあるので，そちらを見てください．

$\boxed{441}$ とりあえず微分してみると，あらら，極値をとる x の値が分かります．さらに x^3 の係数が負なので，どっちが極大でどっちが極小かもわかります．あとは，範囲の両端の値と極大値，極小値の大小比較で，最終的に最大値と最小値が分かってくる思います．

$\boxed{442}$ $\boxed{441}$ と全く同じですが，今度は 4 次関数です．とりあえず微分してみると，あらら，今度も極値をとる x の値が分かります．さらに x^4 の係数が正なので，グラフの概形がわかります．範囲を考えれば最小値は分かるでしょう．最大値は・・・候補となる部分を比較して調べるしかないですね．

$\boxed{443}$ これも重要な問題．おそらく入試に出題されるとすればいきなり (3) がくるでしょう．つまり (1)(2) **の誘導は自分で思いついて，処理せねばならない**ということです (次の $\boxed{444}$ がそのパターンです)．
(1) は，条件式を変形して代入するだけなので問題ないでしょう．
(2) の x の範囲は，問題文の $x \geqq 0$ ではありません．**x の真の範囲は見えないところに隠れています**．それも探ること．
(1)(2) ができれば，(3) は楽勝．範囲も決定した単なる 3 次関数の最大最小問題ですね．

$\boxed{444}$ 先ほどの $\boxed{443}$ では (1)(2) の誘導がありましたが，この問題はいきなり結論を突いてきています．$\boxed{443}$ の (1)(2) のような処理を自分でせねばなりません．$\boxed{443}$ を真似して自分でやってください．なお，ここでも x の範囲が問題．**x の真の範囲は見えないところに隠れています．それも探ること．** なお，数学 III で学習しますが，$x^2+4y^2=4$ は xy 平面上で楕円を表しています．このことが頭にあれば，x の範囲は明らかにわかります．

$\boxed{445}$ $\boxed{429}$ (1) でも出てきましたが，**関数の全体に絶対値がついているグラフは，中身の関数の x より下の部分を上に折り返したものです．** ですから，だいたいの形はわかりますが，やはり正確な形を把握するには微分して増減表を書くしかありません．まずは，中身の関数に注目します．

$\boxed{446}$ いきなり三角関数の最大最小問題ですが，1 **種類の三角関数に統一して置き換え**すれば，単なる 3 次関数の最大最小問題に帰着されます．(1) はそのまま置き換えできます．(2) は適当な変形が必要ですが，何をどのように変形していくかは式の形を見ればわかるでしょう．
なお，当然ながら，置き換えした文字には条件 (範囲) が付きますので，お忘れなきよう．

$\boxed{447}$ (1) は，問題の 2 つの式をうまく組み合わせればできます．ヒントは

$$y^2+z^2=(y+z)^2-2yz$$

です．和 $y+z$ と積 yz が決まれば，y と z を解に持つ 2 次方程式ができます．これが実数解をもてばよいのです．おそらくこの部分が，今回の問題の最大のヤマ場．なかなか思いつかない手法です．
(2) のヒントは

$$y^3+z^3=(y+z)^3-3yz(y+z)$$

ですね．これで一発です．
(3) は，(1)(2) ができれば大丈夫でしょう．単なる 3 次関数の最大最小問題．
やっぱり (1) が一番ムツカシイ．

補足 (参考)

なお，今回の問題では必要ありませんでしたが，$x^2+y^2+z^2$ や $x^3+y^3+z^3$ の式がくれば，条件反射のように思いださねばならない関係式があるので確認しておきましょう．

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$

$$\begin{aligned}&x^3+y^3+z^3\\=&(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz\end{aligned}$$