第6章　微分法と積分法

第2節　導関数

6　関数のグラフと方程式・不等式

448 方程式 $f(x)=0$ の解は，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標として与えられます．今回の場合，(2) だけは実際に因数分解できて解けるので，解の個数は簡単にわかりますが，他はは因数分解できそうにないので，解の様子を調べるにはグラフ考察しかありません．実際にグラフを書いて，x 軸との交点の個数を数えればよいのです．

449 重要な問題です．次の問題の言いかえに注意しましょう．思いっきり丁寧に言いかえると，

方程式 $x^3-12x-a=0$ の解

$\Longleftrightarrow$ 方程式 $x^3-12x=a$ の解

$\Longleftrightarrow$ 連立方程式 $\begin{cases} y=x^3-12x \\ y=a \end{cases}$ の解

$\Longleftrightarrow$ 関数 $y=x^3-12x$ と $y=a$ の交点の x 座標

となります．つまり，3 次関数 $y=x^3-12x$ のグラフを書いて，直線 $y=a$ との交点を調べます．直線 $y=a$ は x 軸に平行な直線なので，a の変化に伴って，x 軸と平行に移動します．

450 これも重要な問題．(1) をやってみます．
次の言いかえに注意しましょう．
思いっきり丁寧に言いかえると，

方程式 $x^3+x^2-x+a=0$ の解

$\Longleftrightarrow$ 方程式 $-x^3-x^2+x=a$ の解

$\Longleftrightarrow$ 連立方程式 $\begin{cases} y=-x^3-x^2+x \\ y=a \end{cases}$ の解

$\Longleftrightarrow$ 関数 $y=-x^3-x^2+x$ と $y=a$ の交点の x 座標

となります．つまり，3 次関数 $y=-x^3-x^2+x$ のグラフを書いて，直線 $y=a$ との交点を調べます．

451 $y=x^3-x$ のグラフを書いて，このグラフと直線 $y=2x+a$ との位置関係を考える人が多いのですが，ちょっと無理です．視覚的にはわかりやすいんですけどね．
接するときの a の値が簡単に求めることができません．2 次関数だったら「連立して判別式 $D=0$」で終わりなんですが．
次の言い替えに注意しましょう．
思いっきり丁寧に言いかえると

関数 $y=x^3-x$ と直線 $y=2x+a$ が異なる 3 点で交わる

$\Longleftrightarrow$ 連立方程式 $\begin{cases} y=x^3-x \\ y=2x+a \end{cases}$ の解が 3 個

$\Longleftrightarrow$ 方程式 $x^3-x=2x+a$ の解が 3 個

$\Longleftrightarrow$ 方程式 $x^3-3x=a$ の解が 3 個

$\Longleftrightarrow$ 連立方程式 $\begin{cases} y=x^3-3x \\ y=a \end{cases}$ の解が 3 個

$\Longleftrightarrow$ 関数 $y=x^3-3x$ と $y=a$ の交点が 3 個

となります．つまり，3 次関数 $y=x^3-3x$ のグラフを書いて，直線 $y=a$ との交点が 3 個あるような a を調べます．

452 いわゆる『中間値の定理』です．これは数学 I の 2 次関数のところですでに学習済みです．『中間値の定理』とは，

> ☆中間値の定理☆
> $a<b$ のとき
>
> $$f(a)f(b)<0$$
>
> ならば，$f(x)=0$ は $a<x<b$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

というもの．ようするに，$f(x)$ の x になんか 2 つの数字 a と b を代入して，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号になれば，$y=f(x)$ は $a<x<b$ で少なくとも 1 回 x 軸と交わる，すなわち，$f(x)=0$ は $a<x<b$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ，ということ．
とにかく，問題に現れた範囲の両端の数字を代入して，その符号を調べること．

なお，中間値の定理を利用するには，関数 $f(x)$ に条件がいるんですが・・・

$\boxed{453}$ 不等式の証明ですが，従来のような証明方法では無理です．この問題は**グラフをかいて考えます**．例えば (1) の場合，

$$2x^3+1 \geqq 3x^2 \iff 2x^3-3x^2+1 \geqq 0$$

なので，$x \geqq 0$ のとき，$2x^3-3x^2+1 \geqq 0$ が成立することを示せばよく，そのために，$y = 2x^3-3x^2+1$ の**グラフを実際に書いて**，$x \geqq 0$ のときに，$y \geqq 0$ になっていることを**視覚的に示せばよい**のです．

$\boxed{454}$ 前問と同じくグラフを考えます．

$\boxed{453}$ のように 3 次関数は全ての実数で正になることはありませんが，4 次関数の場合は全ての実数で正になることがあるんですね．グラフの形を考えれば当たり前ですね．

$\boxed{455}$ とても重要な問題．上の例題 45 を参照しよう．思いっきり丁寧に言いかえれば，

方程式 $2x^3-3x^2-36x=a$ の解

$\iff$ 連立方程式 $\begin{cases} y=2x^3-3x^2-36x \\ y=a \end{cases}$ の解

$\iff$ 関数 $y=2x^3-3x^2-36x$ と $y=a$ の交点の x 座標

となります．つまり，**3 次関数 $y = 2x^3-3x^2-36x$ のグラフを書いて，直線 $y=a$ との交点の x 座標が正で 2 個，負で 1 個になるように a を調べます**．

$\boxed{456}$ 前問と同じです．グラフが 4 次関数になっただけ．問題文の言い換えも大丈夫でしょう．

$\boxed{457}$ 難問です．なぜかというと，**これまでのように a だけを等式の片方に分離できないから**です．無理やり分離すれば

$$\frac{x^3}{3x-1}=a$$

となって，$y=\dfrac{x^3}{3x-1}$ のグラフを書くことになりますが，今の段階では不可能です (数学 III の知識を使えば書けます．犬プリ「数学 III は役に立つのか」を参照のこと)．

この問題は全く違うアプローチ方法が要求されます．

まず，$f(x)=x^3-3ax+a$ のグラフが x 軸と 3 個の点で交わっているイメージをしましょう．極大値と極小値の符号に注目してください．**極大値が正で，極小値が負になっていることに**気付くと思います (極値が共に正だったり，共に負だったりすると，決してグラフは x 軸と 3 個の点で交わることはありませんね)．

つまり，思いっきり丁寧に言いかえれば，

方程式 $x^3-3ax+a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつ

$\iff$ 3 次関数 $f(x)=x^3-3ax+a$ が x 軸と 3 回交わる

$\iff$ $f(x)$ が極値をもち，極大値が正で，極小値が負

となります．つまり，**3 次関数 $f(x) = x^3-3ax+a$ のグラフが $x=\alpha,\ \beta$ で極値をもち，**

$$f(\alpha)f(\beta)<0$$

となればよいのです．

とまあ，理屈は簡単なんですが，実際にこの先の計算が結構大変です．

α と β は $f'(x)=0$ の 2 つの解なので，$f'(x)=0$ を実際に解けば求められます．それらを $f(x)$ に代入して $f(\alpha)f(\beta)<0$ となるように a の範囲を求めるのです．

とにかく，この問題はかなり難しいので今はできなくても構いません．詳しくは犬プリ「3 次方程式の解の個数」を参照のこと。

$\boxed{458}$ とても重要な問題．3 次関数の重要な特徴として，

> **☆ 3 次関数と接点と接線の関係☆**
> 3 次関数においては，**接点と接線は 1 : 1 に対応する**．つまり，接点 1 個に対して接線が 1 本定まり，逆に接線 1 本に対

して接点が 1 個定まる．つまり

接点の個数と接線の本数は一致する．

このことから，接線の本数に関する問題を接点の個数に関する問題にすり換えて考えることができる．

があります．特に最後の文章，接線の本数に関する問題を接点の個数に関する問題にすり換えて考えることができるということが重要です．
今回の問題では，まず接点を $x=t$ とおいて接線の式を作ります．

$$y=(3t^2+6t)(x-t)+t^3+3t^2$$

点 A$(0,\ a)$ を通るのだから，接線の式に $x=0$，$y=a$ を代入すると，

$$2t^3+3t^2+a=0$$

という関係式が得られます (ここまでが (1))．
さて，この式は何を意味しているのでしょうか？
t は接点の x 座標のことです．
問題は，この接線で点 A$(0,\ a)$ を通るものが 3 本存在するということ．つまり，接点が合計 3 個存在すればよいのだから・・・・
いずれにしても難しいです．今はできなくても構いません．詳しくは犬プリで解説します．

$\boxed{459}$ 2 次不等式の場合，例えば，2 次不等式 $(x-1)(x-2)>0$ を解くときは，2 次関数 $y=(x-1)(x-2)$ のグラフを考えて，x 軸よりも上の部分を調べました．つまり不等式をグラフを利用して解いたわけです．ここで注意したいのは，2 次関数 $y=(x-1)(x-2)$ のグラフを書く際，平方完成などしていないことです．つまり x 軸との交点だけに注目してグラフを書いています．このことはとても重要です．
3 次不等式も同じ．(1) の場合，$y=x^3-4x$ のグラフを書いて，x 軸よりも上の部分を考えるのですが，微分や増減表は不要．x 軸との交点だけがわかればよいのです．x 軸との交点は，$x^3-4x=0$ より求まりますね．因数分解できそうです．あとは 3 次の係数が正ですから，概形もわかります．
(2) も (3) も因数分解できるようですね．