第6章　微分法と積分法
8　定積分

☆この章のポイント☆
$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とするとき，

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[\ F(x)\ \Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

と定め，これを $f(x)$ の定積分といいます．a を定積分の下端，b を定積分の上端といいます．
詳しくは，犬プリ『定積分にまつわる話』を参照してください．

$\boxed{466}$ 特にコメントないです．定義に従って，落ち着いて計算するだけ．

$\boxed{467}$ 特にコメントないです．定義に従って，落ち着いて計算するだけ．
すこし模範例を見せると，例えば (4) の場合，

$$\int_{-1}^2(t^2-4t+2)dt$$
$$=\Big[\ \frac{1}{3}t^3-2t^2+2t\ \Big]_{-1}^2$$
$$=\Big(\frac{1}{3}2^3-2\cdot 2^2+2\cdot 2\Big)-\Big(\frac{1}{3}(-1)^3-2(-1)^2+2(-1)\Big)$$

と計算しても良いし，

$$\int_{-1}^2(t^2-4t+2)dt$$
$$=\Big[\ \frac{1}{3}t^3-2t^2+2t\ \Big]_{-1}^2$$
$$=\frac{1}{3}(2^3-(-1)^3)-2(2^2-(-1)^2)+2(2-(-1))$$

と項別にまとめて計算しても構いません (こっちの方がミスは少ないかもね)．

$\boxed{468}$ 特にコメントないです．定義に従って，落ち着いて計算するだけ．不定積分の場合と同様，被積分関数 (つまり中身の関数) が積の形になっている場合は，いったん展開してから積分しましょう．
なお，(1) だけは後で紹介する公式 ($\boxed{475}$ 参照) を利用しても構いません．

$\boxed{469}$ **積分区間が同じ**なので，それぞれバラバラに計算するよりまとめて計算したほうが楽です．つまり，(1) の場合だと，

$$\int_{-1}^2(2x^2+3)dx-\int_{-1}^2(3x-1)dx$$
$$=\int_{-1}^2(2x^2+3)-(3x-1)dx$$
$$=\int_{-1}^2(2x^2-3x+4)dx$$

となります．

$\boxed{470}$ 今度は $\boxed{469}$ と違って，**被積分関数 (中身の関数) が同じ**で積分区間が異なる問題．これには次の公式が有効．犬プリでも紹介しました．

$$\int_a^a f(x)dx=0$$
$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$$

特に，最後の式は，a，b，c の**大小関係はどーでもよいこと**に注意しましょう．
つまり，(3) の場合だと，

$$\int_2^4(x^2+x)dx-\int_0^4(x^2+x)dx$$
$$=\int_2^4(x^2+x)dx+\int_4^0(x^2+x)dx$$
$$=\int_2^0(x^2+x)dx$$

となります．

$\boxed{471}$ ここからの 3 問 ($\boxed{471}$，$\boxed{472}$，$\boxed{473}$) はワンセットで解いておきたいところ．まず，この $\boxed{471}$ は，そのまま定積分の計算をするだけ．最終的な計算結果が x の式になっていることを意識しよう．授業でも言ったけど，このことは**最初から想定しておくべきこと**でしたね．

$\boxed{472}$ $\boxed{471}$ のように，まずは定積分の計算をして x の式を求めてから，それを微分しても構いませんが，この問題の場合は，次にあげる関係式が決定的な意味を持ちます．

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_a^x f(t)dt\Big)=f(x)$$

$\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)$ とは，$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ を x で微分するという意味で，簡単に書けば，$\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)'$ ということです．この式は，$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ を x で微分すると，**ゴチャゴチャしたものが一瞬で姿を消し，中身の関数の t が x に代わって飛び出してくるという神業的なことを意味しています．**

(3) に注意．計算の過程を考えれば明らかなんですが，そんなこと考えたくない人は，積分区間の入れ替え，

$$\int_x^3 (3t^2-1)dt = -\int_3^x (3t^2-1)dt$$

をイメージすればよいでしょう．

473 重要な問題．特に，後ほど出てくる 480 と混同しないようにすること．この問題のポイントは，やはり，

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ を x で微分すると，**ゴチャゴチャしたものが一瞬で姿を消し，中身の関数の t が x に代わって飛び出してくるという神業的なことを意味しています．**よって，それぞれの式の両辺を x で微分すれば，簡単に $f(x)$ が求まります．

もう一つのポイントは，

$$\int_a^a f(t)dt = 0$$

つまり，**定積分の上端と下端をそろえれば，定積分の値は 0 になる**ということです．

このことから，(1) では $x=a$ を，(2) では $x=1$ を両辺の x のところに代入すればよいのです．

☆ポイント☆

$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ の形を見れば，

I **両辺を x で微分する．**

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

II **定積分の上端と下端をそろえるような x を代入**

$$\int_a^a f(t)dt = 0$$

この 2 つを**常識**としておきたい．

474 そのままでもできますが，少し工夫したいところ．犬プリでも紹介しましたが

$$\int_{-a}^a f(x)dx$$

の計算は**大幅に簡略化できる**のでした．詳しくは犬プリを見てください．

475

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

は，後で出てくる放物線がらみの面積を計算する際に大活躍する，非常に重要な公式です．必ず覚えておきましょう．**マイナス（−）の符号が付いている**ことを忘れないでください．今回の問題の場合，(1) が $x^2-x-2=0$ の解が $x=-1,\ 2$ であり，(2) が $x^2-2x-1=0$ の解が $x=1\pm\sqrt{2}$ なので，上の公式がそのまま使えます．

476 $f(x)=ax^2+bx+c$ をそれぞれの条件式に代入するだけ．すると a，b，c の関係式が 3 つ出てきます．この a，b，c についての連立方程式を解けばよいのです．ただそれだけの実につまらん問題．

477 $f(x)$ が 2 次関数と指示されているので，$f(x)=ax^2+bx+c$ とでもおき，条件式に代入するだけ．いずれも a，b，c の関係式が 3 つ出てきます．この a，b，c についての連立方程式を解けばよいのです．単に計算がメンドウなだけの問題ですね．でも，わざわざさせるくらいだから何か意味があるんでしょうね．しばらく計算がしんどいだけの無意味な問題が続くようですね．

478 上の例題 46 を参照のこと．

この問題は $f(x) = ax^2 + bx + 1$ と最初から設定されているので簡単です．要するに任意の 1 次関数 $g(x)$ に対して

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$$

となるのだから，$g(x) = px + q$ とでもおいて，代入して計算．その式が任意の p，q に対して成立すればよいのだから，p，q の恒等式だとみて処理すればよいのです．
これも計算がしんどいだけの問題ですね．やる意味があるんですかね．

$\boxed{479}$ これも上の例題 46 を参照のこと．今度はさらに計算がメンドイ．ホンマに勘弁してほしいです．
この問題は $P(x)$ が 3 次の多項式なので $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおき，$Q(x)$ が任意の 2 次以下の多項式なので，$Q(x) = px^2 + qx + r$ とでもおいて

$$\int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx = 0$$

代入して計算．その式が任意の p，q r に対して成立すればよいのだから，p，q，e の恒等式だとみて処理すればよいのです．
これも計算がしんどいだけの問題ですね．唯一の救いは，積分区間が異符号なので計算が簡略化できること ($\boxed{474}$参照) です．それにしても，やる意味があるんですかね
「計算がしんどいだけでやる意味あるんか？　こんな無意味な問題をなんでさせんねん！」と思わずキレそうになる問題が続きますが，実はこれらの問題には深〜い意味があります．大学で『線形代数学』という科目を (理系の人はほぼ全員) 学びます．その中で『グラム・シュミットの直交化法』というのがあって，$\boxed{477}$，$\boxed{478}$，$\boxed{479}$は，その具体例になっているのです．まあ，詳しくは大学で．

$\boxed{480}$ 超超チョー重要な問題．全問，犬プリ『定積分にまつわる話』でも詳しく紹介しました．
ポイントは

$$\int_a^b f(t)dt = A$$

とおくことです．
定積分の上端と下端がいずれも定数であること．被積分関数 (積分の中身の関数) が t だけの式であることに注意しよう．従って，(2) や (3) では，被積分関数を t だけの式にするために，積分内の x を外に出す必要があります．

$\boxed{481}$ 上の例題 47 を参照のこと．犬プリでも紹介しましたが，積分の式の見た目にビビらず計算結果を予測することが重要．この問題は，x で積分して x に 1 や 0 を代入するのだから最終的には a の式になるはず．つまり，a の関数と見て最大値を求めよということです．

$\boxed{482}$ $f(x)$ が 2 次関数と指示されているので，$f(x) = ax^2 + bx + c$ とでもおくと，条件 $f(0) = 1$，$f(1) = 1$ より，a，b，c の関係式が 2 つ出てきます．

$$f(0) = c = 0, \quad f(1) = a + b + c = 1$$

関係式が 3 つならば，a，b，c は完全に決定するのですが，2 つなので無理です．しかし，これらの関係式から

$$c = 0, \quad b = 1 - a$$

となります．つまり，

$$f(x) = ax^2 + (1 - a)x$$

と，なれば，上の$\boxed{481}$と同じです．

$\boxed{483}$ $\dfrac{d}{dx}f(x)$ とは単に $f'(x)$ のことです．「だったら，最初からそう書けよ」って，突っ込みたくなりますが，理系の場合「何の文字について微分するのか」「何の文字について積分するのか」ということは大変重要な意味をもつので，それを明確にするために $\dfrac{d}{dx}f(x)$ ($f(x)$ を x で微分する) と表記するのです．
最初の式は，$\displaystyle\int_0^x g(t)dt$ の形があるので，条件反射のように x で微分してほしいところ．
つまり，

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x g(t)dt\right) = g(x)$$

ということ．つまり最初の式の両辺を x で微分すると，

$$f'(x)+g(x)=6x+2$$

また，2 番目のの式は，

$$f'(x)=g(x)+4x^2$$

なので，2 つの式を合わせて考えれば，$f'(x)$ と $g(x)$ の連立方程式と考えることができます．よって，$f'(x)$ と $g(x)$ は決定します．あとは，$f'(x)$ から $f(x)$ に戻すだけ．積分定数をお忘れなく．積分定数も決定しますよね？

484 ここからの 3 問，484，485，486 も 1 セットで考えてほしいところ．なぜなら，3 問とも「$f(x)$ のグラフを描く」というのが共通テーマだからです．しかし，問題によって最終的な答え方に差があるので注意してください．目的に応じて，解答の手法を変えねばなりません．

まず，484 ですが，極値をとる x を求めるのが目的なので，当然，$f'(x)=0$ を解く必要があります．だから，$f'(x)$ を求めるのが目的なので，$f(x)=\int_{-1}^{x}(3t^2-4t+1)dt$ の両辺を x で微分すれば，一発で $f'(x)$ がわかります．

なお，細かいことを言えば「$f'(x)=0$ の解を求めて終わり」とするのは少し問題アリ．**$f'(a)=0$ だからといって $x=a$ で極値をとるとは限らない**ことは，微分法のところでも述べました．$x=a$ で極値をとるとはどういうことだったのか？　そのことに言及する必要があるでしょう．

485 今度は，$f(x)$ のグラフを描くのが目的ですが，まずは，$f'(x)=0$ を解く必要があります．だから，まずは $f'(x)$ を調べねばならないので，$f(x)=\int_{-3}^{x}(t^2-1)dt$ の両辺を x で微分して，$f'(x)$ を求めます．$f'(x)$ を求めること自体はすごく簡単です．

しかし，僕は，この問題では上のような手法はとりません．地道に $f(x)$ を計算して求めます．つまり，

$$f(x)=\int_{-3}^{x}(t^2-1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_{-3}^{x}$$

と積分計算してから，$f'(x)$ を求めますね．なぜだか分かりますか？

486 今度は，最大最小問題ですが，結局は $f(x)$ のグラフを描かねばなりません．よって，まずは，$f'(x)=0$ を解く必要があります．先ほどと同様に，$f(x)=\int_{0}^{x}(t-1)(t-3)dt$ の両辺を x で微分して，$f'(x)$ を求めます．$f'(x)$ を求めること自体はすごく簡単です．

しかし，僕は，この問題では上のような手法はとりません．地道に $f(x)$ を計算して求めます．

$$f(x)=\int_{0}^{x}(t-1)(t-3)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_{0}^{x}$$

と積分計算してから，$f'(x)$ を求めますね．なぜだか分かりますか？

487 いわゆる『シュヴァルツの積分不等式』の証明問題です．これには，絶妙な上手い解法があるのですが，その解法は「絶対に思いつかない」解法なので，真面目にコツコツ計算して証明するしかありませんね．当然ながら，不等式の証明方法の型にそって解答を書いてください．

なお，その絶妙に上手い解法を知りたい人は，ヒントを出すので自分で考えてください．

絶妙に上手い解法のヒント

t と定数として，

$f(x)=\left\{(x-a)t+(x-b)\right\}^2$ とおくと，$f(x)\geqq 0$ だから，

$$\int_{0}^{1}f(x)dx\geqq 0$$

が，全ての t に対して成立する（$f(x)$ は常に x 軸よりも上にあるからアタリマエ）．つまり，

$$\int_{0}^{1}\left\{(x-a)t+(x-b)\right\}^2dx\geqq 0$$

$$\int_{0}^{1}\left\{(x-a)^2t^2+2(x-a)(x-b)t+(x-b)^2\right\}dx\geqq 0$$

が，全ての t に対して成立すればよいのです．この式を，t についての 2 次不等式と見ることがポイント．