第6章　微分法と積分法

9　面積

☆この章のポイント☆
面積を求める問題こそ，積分の醍醐味.
区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

で求められます．x 軸よりも上部にあれば，そのまま積分するだけで面積になるのです.
一般に，直線または曲線で囲まれた部分の面積を求めるには，関数の上下関係にだけ注目します．つまり，
① 交点 (あるいは境い目) を求める
② グラフの上下関係 (だけ) に注目して，立式する

$$S=\int_a^b (\text{上の関数})-(\text{下の関数})dx$$

③ 計算ミスしないように神に祈りながらひたすら計算する
です.
なお，犬プリでもたくさん紹介してあるので，そちらも参考にしてください.

488 基本問題です．まず図示すること．今回の関数はすべて，**その区間において x 軸よりも上部にある**ことがわかります．交点を求めて，そのまま積分するだけで面積が求まります.

489 放物線と直線，放物線と放物線で囲まれた部分の面積を求める問題はとても重要．この問題は必ずマスターしなければなりません．次の公式が有効です.

☆重要☆

$$-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

または

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

この公式を使えば，ほとんど計算なしで答えが出せます．しかし，いきなり公式を使って答えだけ求めてはいけません．正しく式を立てること．ただし，式は絶対に間違えないこと．積分の式が間違っているのに，公式をつかって答えだけ正解というのは認められません．犬プリでも詳しく紹介してあります.

490 488 と対にして学習したい問題．まずは図示すること．今回の関数はすべて，**その区間において x 軸よりも下部にある**ことがわかります．よって，面積を求める部分は x 軸よりも下にあります．ですから，x 軸との交点を求めて，そのまま積分するだけではダメですね．(上の関数) − (下の関数) を意識すること．上の関数とは，x 軸つまり $y=0$ のことです.
なお，(3)(4) は 3 次関数の面積ですが，基本は 2 次関数の場合に同じです．つまり，まずは 3 次関数のグラフを描く必要があるのですが，今回は x 軸との交点、および交点の前後における x 軸との上下関係だけに注目すればよいので，微分したり，増減表を書いたり，極値を求めたりする必要はありません.
大雑把に描けばよろしい.
例えば，(3) の場合，

$$y=x^3-5x^2=x^2(x-5)$$

ですから，このグラフは x 軸と $x=0$ で接して，$x=5$ で交わることが分かります．このことと，x^3 の係数の符号にだけ注意すれば，グラフの概形は描けるはずです．(1) は求める面積は x 軸よりも下部になります.
(4) も同様．これはすでに因数分解されてますね.

491 まずは図示すること．490 (3)(4) 同様に「3 次関数なので微分して，増減表書いて・・・」

という必要はありません．あくまでもおおよその増減と交点が分かれば良いのです．特に今回の場合，x 軸とで囲まれた部分の面積なので x 軸との交点，つまり $y=0$ を解くことがポイントとなります．

$$-x^3+x^2+2x=-x(x^2-x-2)=-x(x+1)(x-2)$$

なので，x 軸との交点は，$x=0,\ -1,\ 2$ です．x^3 の係数が負なのでグラフの概形もわかりますね．

492 まずは正確に図示して求める部分を確認しよう．2 つの部分に分割して計算する必要がありそうです．ここでも (上の関数)−(下の関数) を意識すること．

493 **絶対値の付いた関数の積分は，まずは関数を図示する**ことから始まります．そのためには次のポイントが重要．

> ☆重要☆
> $y=|f(x)|$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフの x 軸よりも下の部分を上に折り返したものである．

したがって，$y=|f(x)|$ のグラフは，常に x 軸よりも上にあるので，定積分

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

の値を求めることは，必然的に，$a\leqq x\leqq b$ における $y=|f(x)|$ のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積を求めることになります．
したがって，まずは (1)〜(4) の関数を図示することからはじまります．
グラフの様子に応じて，積分区間を適当に分割して計算する必要があるでしょう．かなり計算が面倒です．

494 基本的にこれまでどおり．図示して，上下関係に注目して面積を求めるだけです．これまでと違うところは，交点がシンプルな数字にならないことです ((1) と (2))．こういう場合は，無理に求めようとせずに，交点の x 座標を α，β とでも置き換えて処理することがポイントです．こういうときだからこそ，公式が有効ですね．ただしく立式すること．
(3) は図を正確にかいて，上下関係に注目．少しでも計算を楽するために，公式を使えるところはドンドン使いましょう．

495 まずは，与えられた不等式の領域を図示すること．放物線を斜めから平行な 2 直線で切ったような図になるはず．ここでも，公式が大活躍するでしょう．この公式を使わずに計算するのは，メチャクチャ大変だと思います．やりたくないですね．

496 当然これも図示．$y=ax-x^2=-x(x-a)$ なので，x 軸との交点は明白．公式もバッチリ使えるし特に問題ないと思いますが，式だけはきちんと書いてください．

497 犬プリ『おいしい面積の話』で紹介しました．いちおう，2 つの接線や交点を求めて，ただしく立式して計算してください．
なお，答えだけでよければ，問題文を見ただけで答えが出せますよね．君たちにもそうなってほしいです．

498 これも，犬プリでも紹介しました．点 P をどのようにとっても囲まれる部分の面積が一定なのは不思議じゃないですか？

499 重要な応用問題．まずは上の例題 48 を参照してください．
これも犬プリでも紹介しました．まずは，直線 g の式を設定し，放物線との交点を求めること．正しく立式して面積を計算すること，これまでどおりの手法に従うだけですね．これも犬プリで詳しく解説してあります．

500 499 とほとんど同じですね．

501 原点を通る直線を $y=mx$ とし，曲線 $y=x^2-2x$ と囲まれた部分の面積なので，サクッと図を描くと・・・・簡単？

思い込みは禁物です．その図だけで本当によいでしょうか？罠にハマりやすい問題．昔，京大で類題が出題されました．

$\boxed{502}$ 重要な応用問題．まずは上の例題 55 を参照してください．
犬プリでも紹介しました．まずは直線の式を設定し交点を求めます．実は，この交点がきれいに求まらないのです．このような時は，とりあえず**交点を $x=\alpha$，β とでもおいて計算を進めるしかありません．**
なんとか面積を表すことができたら次は面積の最小値です．おそらく $\sqrt{}$ やら 3 乗やらが混在したややこしい式になっていると思います．この式そのものを扱うのは現時点では無理．では式のどの部分に注目すればよいのでしょうか．

$\boxed{503}$ 3 次関数の接線で囲まれた部分の面積も頻出の重要問題．積分するまでの準備段階（これは微分法の範囲）が重要です．まずは接線を求めよう．これは簡単．次に，その接線と 3 次関数の交点を求めます．もちろん図示して，3 次関数と接線の上下関係調べなければ．やることはたくさんありそうです．犬プリでも詳しく解説してあります．$\boxed{409}$も見ておいてください．

$\boxed{504}$ これも，大雑把なグラフで十分．ただし，交点の x 座標は確実に求めてください．(1) は積分区間が異符号になるはず．ということは，$\boxed{474}$でやったような**計算の簡略化が期待できそう**です．
(2) も簡単に図示できます．

$\boxed{505}$ 3 次関数の特徴に注目した重要な問題．上の例題 50 を参照してください．この事実はとても重要．気が向けば犬プリで解説します．
なお，例題 56 の図を見ればなんとなく分かると思いますが，直線が 3 次関数のど真ん中を通っていることが分かります．**3 次関数のグラフは点対称**になっています．**このど真ん中の点が，点対称の中心で，変曲点と言われる点**です．この変曲点の x 座標は，$f''(x)=0$ で求められることを数学 Ⅲ で学習します．

$\boxed{506}$ 「横向きの面積なんてわけかんな〜い」というひとは問題集を反時計回りに 90° 回転させたらどうでしょうかね．x 軸を縦軸に，y 軸を横軸に考えればいいだけなんですけど．
別にやらなんでもエエよ．