第 1 章　式と証明

7　不等式の証明

不等式を証明することは，数学の諸問題の中でも最も大切なテーマです．

証明の型をしっかりと守り，独りよがりな答案にならないように繰り返し練習しよう．「証明したつもり」で終わることないよう，自分の答案を先生に見てもらってチェックを受けることが望ましいです．

▷Point◁(不等式の証明の基本 3 型)

不等式 $A \geqq B$ を示すには？

① $A-B$ を式変形して 0 以上になることを示す．
　⟶「どのような手段で 0 以上であることを示すのか」がポイント．

② A を直接に変形して B 以上になることを示す．

③ $A \geqq C$ かつ $C \geqq B$ を示す．

53 いきなりコレですか・・・．これは基本 3 型と違うちょっと異質な問題．パスして先に進もう．

54 基本 3 型の ①．(左辺) − (右辺) が 0 より大きいことを示すためには，どのような形にもっていけばよいのか，を練習する問題．例えば (1) の場合，

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = xy-2x+3y-6$$

の式を見れば，必然的に何をやるかは分かるでしょう？

(2) も同様です．そうです，因数分解がポイントです．

55 基本 3 型の ①．これも前問同様に，(左辺) − (右辺) が 0 より大きいことを示すためには，どのような形にもっていけばよいのか，を練習する問題．例えば (1) の場合，

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = x^2-2x+1$$

これは，まあ明らかですね．$\boxed{53}$ と同じく因数分解．

(2) の場合，

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = x^2-2x+2$$

今度は因数分解できません．では，どうするのか？ヒントは 2 次関数のところで何度も練習したアレです．

はい，平方完成がポイント．(1) もある意味平方完成です．(3) と (4) は 2 文字の式ですが，1 つの文字に注目して平方完成すれば大丈夫．なお，(3)(4) は等号が成立する場合をチェックしといてください．

56 これも基本 3 型の ①．でも，そのまま (左辺) − (右辺) を式変形しようとしてもうまくいきません．そこで，次のルールに従います．

▷Point◁(不等式の証明のコツ)

不等式 $A \geqq B$ が示しにくいときは，両辺が正の場合に限り，$A^2 \geqq B^2$ を示しても良い．

これは大変重要なテクニックです．なぜ，2 乗して示しても良いのか証明できますか？「不等式の証明方法を証明する」なんて，変な感じですが，とても重要なので必ず確認しておこう．そうすれば，この論法を使うときの「おまじない」の必要性がわかると思います．

(1) も (2) も，両辺が正なので，2 乗して引き算します．「おまじない」を忘れないように．(2) は等号が成立する場合をチェックしといてください．

57 $\boxed{56}$ 同様，(1) も (2) も両辺が正なので，2 乗して引き算します．「おまじない」を忘れないように．まさかとは思いますが，$\sqrt{7}$ や $\sqrt{8}$ などの値を暗記している人がいたとしても，「$\sqrt{7}=2.64\cdots$, $\sqrt{8}=2.82\cdots$, $\sqrt{5}=2.23\cdots$, $\sqrt{10}=3.16\cdots$，なので $\sqrt{7}+\sqrt{8}>\sqrt{5}+\sqrt{10}$ は明らか」という証明は認められません．

58 まあ，そのまま普通に引き算して式変形するだけの問題なんですが，こういう式を見ると「なんか背景があるんとちゃうか？」と疑ってしまうのが僕の悪い癖です．真ん中の項 $\dfrac{3a^2+2b^2}{5}$ を見て，分母の数字が 5,

分子の数字が 2 と 3，このことだけで僕はヒラメキましたけどね．「a^2 円のお菓子が 3 個，b^2 円のお菓子が 2 個ありました．このとき・・・・」ああ，そういうことを言っているのね．

59 お〜，やっと出ました超重要不等式．

▷Point◁（相加相乗平均の大小関係）

$x>0$，$y>0$ のとき，

$$\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$$

が成立する．
ただし，等号成立は $x=y$ のとき．

この不等式はとても重要で今後様々な場面で遭遇すると思うので，しっかりと理解して覚えてください．使えるための条件（正の数の場合しか使えない）と等号成立条件を忘れないことがポイントです．
(1) はそのまま ab と $\dfrac{1}{ab}$ に対して『相加相乗平均の大小関係』を適用します．(2) は一旦，展開してからがよいでしょう．展開しなくてもできる場合もありますが，安全策をとって，展開してやってください．
『相加相乗平均の大小関係』は証明なしで用いて構いませんが、とはいえ，不等式の証明問題であることにかわりはないので，証明の基本 3 型に従って答案を作成してください．

注　なお，実際には両辺を 2 倍した式

$$x+y \geqq 2\sqrt{xy}$$

を使う場合が多いです．

注　特に，「『逆数の和』とくれば『相加相乗平均』を使う」ことは常識としておきたいところ．

60 これも基本 3 型の ①．（左辺）−（右辺）が 0 より大きいことを示すための手法は因数分解か平方完成が基本．今回の場合，どちらを使うのか，それともどっちも使うのか？ (1) も (2) も等号が成立する場合をチェックしといてください．

61 文字数が増えてきましたが，基本は同じです．1 つの文字に注目して，基本 3 型の ① に従います．（左辺）−（右辺）が 0 より大きいことを示すための手法は因数分解か平方完成が基本．

参考 次の不等式は『コーシー・シュヴァルツの不等式』と言われる有名な不等式です．

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$
$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

例えば，60 の (1) は，上の不等式で $a=x^2$，$b=y^2$ に置き換えたものです．
例題 7 は，下の不等式で $a=3$，$b=-2$，$c=-1$ に置き換えたものです．
61 (4) は，下の不等式で $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ に置き換えたものです．
なお，テストなどでは，この結果をいきなり用いることは避けたほうが良いでしょう．

注　49 を参照のこと．コーシーシュヴァルツの不等式の等号成立の場合の問題です．

62 う〜ん，なんでこのタイミングでこの問題が登場するのか分かりませんね．不等式の証明とは何の関係もないです．
問題集下のヒントをみて勝手にやっといてください．当然ながら，1 つの文字に注目して平方完成です．

63 絶対値とルートが混在する不等式の証明は，「2 乗して引く」のが基本．「おまじない」を忘れずに丁寧に答案を作ってください．
絶対値の不等式の基本は

$$|A| \geqq A$$

です．等号成立は $A \geqq 0$ のときです．
なお，こういう式を見ると「なんか背景があるんとちゃうか？」と疑ってしまうのが僕の悪い癖です．ちょっと考えれば，この不等式の意味するとても美しい図形的な性質を発見しました．興味あるひとは聞きに来てください．

64 まあ，普通に引き算してもできますし，ルートがうっとおしい人は，「おなじない」をした上で 2 乗して引いてもいいです．どっちからどっちを引くかは，まあテキトーに．
し，しかし，これにも背景があります (また悪いクセが出てきた！)．

$$\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

と変形します．これは『調和平均』と言われるもので，それなりに意味があります．

参考 様々な平均

$$\frac{a+b}{2} \longrightarrow \text{相加平均}$$

$$\sqrt{ab} \longrightarrow \text{相乗平均}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \longrightarrow \text{調和平均}$$

相加平均と相乗平均の大小関係はすでに学習しています．この問題は，相乗平均と調和平均の大小関係がどうであるか調べよ，と言っているのです．
なぞ，そもそも『調和平均』とは何なのか，どんな場面で登場するのか，については各自で調べといてください．

65 1 と ab と a^2+b^2 の 3 項の大小比較．単純に考えれば，6 通りの順番があるので，どのパターンになるのか分からないのに，テキトーに引くわけにはいきません．

▷Point◁ (不等式の証明のコツ)

条件にある数字をテキトーに決めて数値計算し，大小関係を予測する．

今回の場合，$0<a<b$，$a+b=2$ なので，例えば，$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$ などとして，数値計算し大小関係を予測してください．それから証明です．
証明方法は従来通り．そんなに難しくはありません．

66 これはなかなか面白い問題です．これまで通りに (左辺) − (右辺) を式変形して因数分解または平方完成に持ち込むのが普通なんですが・・・・とりあえず，1 つの文字で整理してみると

$$\begin{aligned}&(\text{左辺})-(\text{右辺})\\&=(b+c)a^2+(b^2+c^2-6bc)a+bc(b+c)\end{aligned}$$

となり，ここで筆が止まります．残念ながら失敗！
(左辺) − (右辺) を整理せずにばらばらにして書いてみます．

$$ac^2+b^2c+bc^2+a^2b+a^2c+ab^2-6abc$$

何か感じるものはありますか？
感じないですって！じゃあ，項の順番を少し変えて

$$ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2-6abc$$

まだ感じないですって！え〜い，これでどうだ！

$$ab^2-2abc+ac^2+bc^2-2abc+ba^2+ca^2-2abc+cb^2$$

なに！まだ感じないだと！え〜い，これでカンベンしてくれ〜．

$$a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ac+a^2)+c(a^2-2ab+b^2)$$

実にうまくいっていると思いませんか．

注　なぜ，このようなうまい変形を思いついたのか．それは最初からある程度結果を予想していたからです．というのも，示すべき式を見て，僕が真っ先に感じたのは「a，b，c に関して対称的で美しい」ということです．ということは，等号成立条件も a，b，c についての対称性があるはず．だったら，「$a=b=c$ のとき」くらいしか思いつかない．じゃあ，$a=b=c$ が等号条件になるにはどんな式がイメージできるだろうか？そこで，思いついたのが，教科書 P30 の応用例題 3 です (必ず見といてください)．これに似てませんか？ひょっとして，$(a-b)^2$ や $(b-c)^2$ や $(c-a)^2$ が登場するのではないか？と考えました．最後に「$-6abc$ を $-2abc$ が 3 個」と解釈して・・・完璧です．

➾**注**　別冊の模範解答では『相加相乗平均の大小関係』を利用してるみたいですが，僕はあんまり好きではありません．僕の解答の方が勉強になるので，こっちでやってください．

$\boxed{67}$ こういう問題が入試に良く出るタイプです．しっかりと理解しておこう．
(1) は「逆数の和」だからアレですね．
(2) も，$ab=12$ より $b=\dfrac{12}{a}$ として代入すれば，やっぱり「逆数の和」になるからアレですね．
(3) はちょっと難しい (けど，大切！)．(2) の流れで $b=\dfrac{4\sqrt{2}-2a}{3}$ として代入すれば，a の 2 次関数になるので，結局，2 次関数の最大値を求めるだけなので終わりです．
でも，2 次関数の最大値を求めるときに注意せねばならないのは，a の範囲です．問題文にありますが，a の範囲は $a>0$ ではありません！！！
このように，1 文字消去すればちょっとややこしくなってしまうので，そうはならないようにアレを使いましょうかね．逆数の和ではありませんが，とりあえずアレを使ってみましょう．

$\boxed{68}$ これは有名な問題で，なかなか難しい．
まずは，

$$|a|<1 \iff -1<a<1$$

であることを確認しよう．b，c の範囲も同様です．
となれば，(1) は普通に (左辺) − (右辺) を計算すれば大丈夫です ($\boxed{54}$ (1) 参照)．
(2) が難しい．ていうか，なかなか気づきにくい！
そのまま (左辺) − (右辺) を計算しても，因数分解も平方完成も何もできないので失敗です．じゃあ，どうするのか．
得てして，(1)，(2) と小問が続く場合は，(1) が (2) のヒントになっている場合が多いので，「(1) の結果を利用できないだろか」と考えます．文字に惑わされてはいけない．
(1) は

> $|○|<1$，$|●|<1$ ならば
>
> $○●+1>○+●$
>
> が成立する．

ということを言っているだけで，○や●は，条件を満たしてさえいれば何でも構わないのです．
以後，問題集下のヒントをみて自分で考えてください．あえてもう一つヒントを言うなら「(1) の結果を 2 回使う」ってことかな．
➾**注** (1) を利用せずに (2) を解くことができます．僕は発見しました．なかなか面白い方法なので、興味ある人は聞きに来てください．

$\boxed{69}$ う～ん，最後がこれかあ．$\boxed{64}$ と $\boxed{65}$ がヒントですね．
(1) は，なかなか興味深い結果です．
$\dfrac{a}{d}$ と $\dfrac{c}{b}$ に対して，分母分子同士の和 $\dfrac{a+c}{b+d}$ と積 $\dfrac{ac}{bd}$ との大小比較をせよ $\dfrac{a}{d}$ とということ．そんなもん決まるんかいな？と思ってしまいますが，まあ決まるんでしょう．それなりに結果に興味はあります．
(2) は，$\boxed{64}$ の **参考** でも述べたように，

$\dfrac{a+b}{2}$ ⟶ 相加平均

$\sqrt{ab}$ ⟶ 相乗平均

$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ ⟶ 調和平均

の大小関係はすでに分かっているので，実質，$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ がどの位置に入ってくるのか，ということですね．

この節の問題は最後の発展問題 2 問以外はそれも重要な問題なので，答案の書き方を含めて，繰り返し練習してマスターしといてください．個々の問題の解法が後々に役に立ってくると思います．