第2章　複素数と方程式

1　複素数

$\boxed{70}$ 特にコメントする必要ないです．複素数 $a+bi$ において，a を実部，b を虚部といいます．

$\boxed{71}$ ポイントは『複素数の相等』です．

▷Point◁(複素数の相等 ①)

x と y が実数のとき

$$x+yi=0 \iff x=y=0$$

が成立する．

「x と y が実数のとき」という断り書きがメチュクチャ大切なのです．

なお，以下の関係も成立します．

▷Point◁(複素数の相等 ②)

a と b，c と d が実数のとき

$$a+bi=c+di \iff \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

が成立する．

ここでも「a と b，c と d が実数のとき」という断り書きがメチュクチャ大切なのです．

なぜ，これらの断り書きが必要なのか，関係式 ① から 関係式 ② を導き出せるか，はとても重要なことなので各自で確認しといてください．

$\boxed{72}$ $i=\sqrt{-1}$ のことなので，これらの計算問題はいわば単なるルートの計算と同じです．$i^2=-1$ であることに注意して，中学校の計算練習のノリでやってください．

$\boxed{73}$ $a+bi$ と $a-bi$ を共役な複素数といいます．共役な複素数同士の和や積は実数になります．

$(a+bi)+(a-bi)=2a$

$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

$\boxed{74}$ $\boxed{73}$同様の計算問題．今度は分数型ですが，これもルートの計算と同じ．つまりは分母の有理化です．例えば (3) の場合，分母分子に分母の共役複素数をかけます．$\boxed{73}$より，共役複素数の積が実数になることがわかっているので，

$$\begin{aligned}\frac{i}{\sqrt{3}+i} &= \frac{i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} \\ &= \frac{\sqrt{3}i+1}{(\sqrt{3})^2-(i)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}i+1}{3+1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{4}\end{aligned}$$

となります．

$\boxed{75}$ よく間違う平方根のルートの計算です．

ルートの中だけを計算してはダメです．

$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{6}$

$\longrightarrow$ × 間違い

$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i$

$=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6} \longrightarrow$ ○ 正解

つまり，まずは i を使って書き直してから計算します．これはルールなので覚えてください．

$\boxed{76}$ $\boxed{75}$同様．まずは i を使って書き直してから計算します．

$\boxed{77}$ もう一度言いますが，$i=\sqrt{-1}$ なので単なるルートの計算問題です．$i^2=-1$ に注意して慎重に，確実に計算してください．

$\boxed{78}$ 有名問題．(1) と (2) は x を y をそのまま代入すればよいですが，(3) と (4) は x を y をそのまま代入して計算するのはちょっとキツイです．これらは対称式といわれる式です．対称式とは文字を入れ換えても式の形が変わらない式のことで，対称式は，和 $x+y$ と積 xy を用いて表現することができます．

✎**注**　なぜ，対称式が和と積で表すことができるのか，ということの証明は高校段階ではちょっと無理です．あきらめて結果を覚えておきましょう．

$\boxed{79}$ $\boxed{71}$と同様に『複素数の相等 ①②』を利用しますが，$\boxed{71}$が最初から ○ + $\triangle i$ の形になっているのに対して，今回はそのような形になっていません．まずは，虚数単位 i のあ

る部分とない部分にまとめるなど式変形して『複素数の相等 ①②』が使える形にせねばなりません．そうなればあとは簡単です．

$\boxed{80}$ 複素数 $a+bi$ で, $b=0$ のときを実数, $a=0$ のときを純虚数といいます．つまり実数は複素数の一部分なのです．今回の場合,

$$(a+bi)+(2-3i)=(a+2)+(b-3)i$$

これが純虚数になるので・・・・

$$\begin{aligned}(a+bi)(2-3i)&=2a-3ai+2bi+3b\\&=(2a+3b)+(2b-3a)i\end{aligned}$$

これが実数になるので・・・・

$\boxed{81}$ $\boxed{80}$ でも述べたように， 複素数 $a+bi$ で, $b=0$ のときを実数といいます．
今回の場合, $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ とおいて和と積を計算，これらが実数になるので，その虚部が 0 になります．
さて，α と β が共役であることを示すことが目標．つまり，$a+c$，$b=-d$ であることを示せばよいのです．

$\boxed{82}$ この期に及んでまた計算問題？って声が聞こえてきそうですが，ちょっとメンドくさそうな計算式です．まさか 10 乗やら 50 乗までの和を実際に計算する人はいないでしょう．
ポイントは「規則性」．2 乗，3 乗などの様子から 10 乗, 20 乗の結果を予想していきます．
例えば, (1) の場合，まずは (　) 内部を計算してから 2 乗してみると

$$\begin{aligned}\frac{7+3i}{2+5i}&=\frac{(7+3i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}\\&=\frac{14-35i+6i+15}{4+25}\\&=\frac{29-29i}{29}=1-i\end{aligned}$$

なので,

$$\left(\frac{7+3i}{2+5i}\right)^2=(1-i)^2=1-2i-1=-2i$$

です．こうなれば, $\left(\frac{7+3i}{2+5i}\right)^{10}$ の計算も大したことありませんね．
このように，とりあえず 2 乗，3 乗あたりを計算してそれから考える，という思考方法は今後もよく登場する大切な数学的な考え方です．
ちなみに，虚数単位 i は 4 乗で元に戻ってくるという周期性をもっています．

$$\begin{aligned}&i^1=i\\&i^2=-1\\&i^3=i^2\times i=-i\\&i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1\\&i^5=i^4\times i=i\end{aligned}$$

なので,

$$i\longrightarrow -1\longrightarrow -i\longrightarrow 1\longrightarrow i\longrightarrow -1\longrightarrow\cdots$$

とくり返していきます．なぜ 4 乗すれば元に戻ってくるのか，という問いには，数学 III で学習する『複素数平面』の考えを用いれば，図形的に納得できますので，そのときまでお待ちください．