第1章　式と証明

2　二項定理

二項定理は旧課程では数学 I の「順列・組み合わせ」の単元で学習しましたが，こんなところに飛ばされてきました．あ〜あ．まあ，ええですけど．

二項定理は兎にも角にも以下の公式を正確に暗記せねばなりません．

▷Point◁(二項定理)

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n b^0 + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} a b^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n a^0 b^n \quad \cdots\cdots(※)$$

なぜこんな形の展開式になるのか，なぜ組み合わせの記号 C が登場するのか，紙面の都合で説明は省略します．

とても重要なことなので，各自でしっかりと理解しといてくださいね．

8 特に申すことございません．公式に当てはめるだけです．特に $(a-b)^n$ の場合の符号のミスに注意しよう．

9 8 と同じ．符号や計算ミスに注意して，落ち着いて計算しよう．

10 ようするに「それぞれの項を何個ずつ取るのか」がポイントです．例えば，(1) で $(3x+1)^5$ の展開は $3x$ と $+1$ を合わせて 5 個選ぶ組み合わせとして表されるので， x^4 の項は，$3x$ が 4 個，$+1$ が 1 個で x^4 が作られると考えられます．つまり

$$\frac{5!}{4!1!}(3x)^4(+1)^1$$

となります．そのほかも一緒．コツをつかめばカンタンだねえ．

11 パッと見，「二項係数の和」なんてどーすんねんって感じですが，なんのこっちゃない，二項定理の公式にテキトーに数字を代入するだけで得られます．ていうか，そうするしか無理です．

(1) の場合，(※) 式において，$a=1$，$b=2$ とすればＯＫ．(2) は自分で考えてください．まあ，なんとなく分かるでしょう．

この考え方はまあまあ重要で忘れたころに突然登場するので，頭の片隅に必ず置いておきましょうね．

参考 二項係数の単純な和

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$$

もよく出題されます (言うまでもなく，$a=b=1$ を代入)．

では，奇数番目だけの和

$${}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_5 + {}_n\mathrm{C}_7 + \cdots\cdots$$

や，偶数番目だけの和

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + {}_n\mathrm{C}_6 + \cdots\cdots$$

はどうやって求めるのでしょうか？興味あるひとは考えといてください．

12 基本的に 10 と同じ．ようするに「それぞれの項を何個ずつ取るのか」がポイントです．例えば，(1) で $(2x^2-1)^6$ の展開は $2x^2$ と -1 を合わせて 6 個選ぶ組み合わせとして表されるので， x^6 の項は，$2x^2$ が 3 個，-1 が 3 個で x^6 が作られると考えられます．式は省略します．

(2) の $(2x^3-3x)^5$ の展開ですが，$2x^3$ と $-3x$ を合わせて 5 個選んで，x^9 の項を作るのですが，それぞれ何個ずつ取るのかすぐにはわかりません．そこで，$2x^3$ を a 個，$-3x$ を b 個選ぶと考えて，

$$a+b=5, \qquad 3a+b=9$$

を解けば分かります ($a=2$，$b=3$)．関係式の意味は分かりますよね．$a+b=5$ は

「合わせて 5 個」，$3a+b=9$ は「次数が 9」ということを意味しています．
計算式は省略．
注 (2) は次のようにしても分かります．

$$(2x^3-3x)^5=x^5(2x^2-3)^5$$

なので，x^9 を作るには，$(2x^2-3)^5$ から x^4 を作り出せば良いので，$2x^2$ を 2 個，-3 を 3 個選ぶことになります．

$\boxed{13}$ ん？なんでここで登場するのかな？ 3 項の展開は次のページ ($\boxed{19}$ と $\boxed{20}$) で詳しく扱うのですが，おそらく，問題集の意図としては，次のページの考え方を用いずに解け，ということなのでしょう．そんなことお構いなしに，次のページの方法で解きます．
項が 3 個になっても考え方は同じです．ようするに「それぞれの項を何個ずつ選ぶのか」がポイントです．例えば，(1) で $(a+b+c)^6$ の展開は a と b と c を合わせて 6 個選ぶ組み合わせとして表されるので， ab^2c^3 の項は，a が 1 個，b が 2 個，c が 3 個で x^6 が作られると考えられます．よって，

$$\frac{6!}{1!2!3!}a^1b^2c^3$$

となります．(2) も同じ．

$\boxed{14}$ わりと大切な問題．「二項定理を用いて」と指定されていますが，もしノーヒントで出題されたらどうしますか？6 : 4 くらいで「二項定理」でしょうか．数学 B で学習する「数学的帰納法」を利用することもできます．
さて，本問の場合，公式 (※) を使うのですが，ようするに公式 (※) の a と b をどういう数字，文字で置き換えますか，ということ．右辺側の式をじっとにらんで，a と b を考えてください．
(1) は，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ です，$a=1$，$b=\dfrac{1}{n}$ とするか，$a=\dfrac{1}{n}$，$b=1$ とするか，の二択になると思います．どっちにするか？迷ったらどちらの場合でもやってみてください．ヒントは最初の 2 項くらいを計算すればバッチリ右辺側の形が出てくると思います．「とりあえずやってみる」という姿勢は大切ですね．
(2) も，$a=1$，$b=x$ とするか $a=x$，$b=1$ とするか．これもどっちもやってみれば？うまく右辺側の式が出てくると思います．
なお，不等式の証明では等号成立条件を明記するのが常識ですので，(2) では等号成立条件を調べといてください．

$\boxed{15}$ $\boxed{10}$ や $\boxed{12}$ と全く同じやんか！と思うかもしれませんが，さにあらず．なかなかメンドクサイ．というのも，「それぞれ何個ずつ選ぶのか」がパッとわかりません．ということで，まずはこの部分から調べないといけません．
(1) の場合，$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の展開ですが，x^2 と $\dfrac{1}{x}$ を合わせて 7 個選んで，x^2 の項を作るのですが，それぞれ何個ずつ取るのかすぐにはわかりません．そこで，x^2 を a 個，$\dfrac{1}{x}$ を b 個選ぶと考えて，

$$a+b=7,\qquad 2a-b=2$$

を解けば分かります ($a=3$，$b=4$)．関係式の意味は分かりますよね．$a+b=7$ は「合わせて 7 個」，$2a-b=2$ は「次数が 2」ということを意味しています．言うまでもなく，$\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ と解釈しています．計算式は省略．
なお，(2) で「定数項を求めよ」とありますが，定数項とは，言うまでもなく，x^0 の係数のことです．

$\boxed{16}$ まさか 11^{11} を実際に計算する人はいないと思います．数学 A の「整数問題」かと考えて，mod 計算をしようとする人もいるかもしれませんが，ちょっと無理です．$11^{11}=(10+1)^{11}$ と解釈して二項定理で展開します．おそらく，10^{11}，10^{10}，10^9，…，10^2，10^1，10^0 の項が現れると思いますが，100 で割った余りを考えるのだから，100 で割って余りの出てくる項だけに注目すればよ

いですね．ということは，10 の○乗以上はムシですね．

✏注 数学 A で，例えば「3^{100} を 4 で割った余りは？」などの問題を解いたと思います．『合同式』を用いれば，$3 \equiv -1 \pmod 4$ なので，

$$3^{100} \equiv (-1)^{100} \equiv 1 \pmod 4$$

とし，余りが 1 であることが分かりますが，本来この問題は，二項定理を利用して解くべきであり，『二項定理』の解答を簡略化したものがこの『合同式』による解答なのです．根底に『二項定理』があることを忘れないでください．

二項定理による解答とは，

$$3^{100} = (4-1)^{100} = (4\text{の倍数}) + (-1)^{100}$$

です．二項定理で展開すると，$(-1)^{100}$ 以外の項にすべて数字 4 が含まれているので，その部分の和が 4 の倍数になるので，末項の $(-1)^{100}$ が 4 で割った余りに相当します．上の『合同式』の解答と同じですよね．

$\boxed{17}$ これはちょっとややこしいし，難しいので今はやらなくても良いかもしれません．

$$(1+x)^n(x+1)^n = (1+x)^{2n}$$

の式を見てちょっと違和感感じませんか？前半の項が $(1+x)$ なのに，後半の項が $(x+1)$・・・何かヒントがあるのでしょう．とりあえず，$(1+x)^n(x+1)^n$ を二項定理で展開してみよう．

$$\begin{aligned}&(1+x)^n(x+1)^n\\ =&({}_n\mathrm{C}_0x^0 + {}_n\mathrm{C}_1x^1 + {}_n\mathrm{C}_2x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nx^n)\\ &\times({}_n\mathrm{C}_0x^n + {}_n\mathrm{C}_1x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2x^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n1^n)\end{aligned}$$

これをさらに展開するのですが，展開したときに，

$${}_n\mathrm{C}_0{}^2 + {}_n\mathrm{C}_1{}^2 + {}_n\mathrm{C}_3{}^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n{}^2$$

が登場する部分に注目しましょう．いったいどの項でしょうか．それは右辺部の式

$${}_{2n}\mathrm{C}_n$$

とどういう関係にあるのでしょう？

$\boxed{18}$ これも今はやらなくても良いでしょう．う〜ん，でも (1) 程度は常識の範囲内でしょうか？

(1) は式変形で証明する方法と，文章で証明する方法の 2 通りあります．どちらも大切です．

まず，計算による証明は，「C」の定義（重要です！），

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

を利用して，ガリガリ式変形するというもの．落ち着いて計算すれば出来ると思います．

文章による証明ですが，この式は「n 人の中から k 人選んでその中からリーダーを 1 人選ぶ方法」を意味しています．

あとは自分で考えてください．

$\boxed{19}$ このタイプは $\boxed{13}$ ですでに登場したので，そちらを参照のこと．この問題はどうってことありません．

$\boxed{20}$ まずは上の例題 3 をしっかりと理解しよう．これは $\boxed{15}$ の 3 項バージョン．まずは $\boxed{15}$ をしっかりと理解しておくことです．基本は全く同じ．「それぞれ何個ずつ選ぶのか」がパッとわからないので，まずはここから調べようということ．

(1) の場合，$(x^2-x+2)^4$ の展開ですが，x^2 と $-x$ と $+2$ を合わせて 4 個選んで，x^5 の項を作るのですが，それぞれ何個ずつ取るのかすぐにはわかりません．そこで，x^2 を a 個，$-x$ を b 個，$+2$ を c 個選ぶと考えて，

$$a+b+c=4, \qquad 2a+b=5$$

を解けばよいのです．し，しかし文字が 3 つで，式が 2 個だから，原則的に解くことができません！どうすのか・・・実は「a, b, c が 0 以上整数である」という条件から，解を絞り込むことができます．おそらく，$(a,\ b,\ c)$ の組み合わせは何通りかあると思います．つまり，x^5 の項を作る組み合わせが複数あるので，そのそれぞれの場合で係数を計算して，最後に総計すればよいのです．