第2章　複素数と方程式

2　2次方程式の解と判別式

$\boxed{83}$ 特にコメントする必要ありません．2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

に当てはめるだけ．＊印だけで十分です．

$\boxed{84}$ これも特にコメントする必要ないです．$\boxed{83}$ 同様．ちょっと計算がウザイですが，ミスなく正確に．これも＊印だけで十分です．

$\boxed{85}$ 判別式を利用する基本問題．
言うまでもなく，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の分類は，解の公式の $\sqrt{\quad}$ の内部 b^2-4ac の符号で決まるのでした．

▷Point◁（解の判別）
$D>0$ のとき，異なる 2 つの実数解
$D=0$ のとき，重解
$D<0$ のとき，異なる 2 つの虚数解

これらは，暗記するのではなく，意味を考えて実感してほしいところ．
なお，解答の際は「判別式を D とすると・・・」というオマジナイから始めること．

$\boxed{86}$ m の値によって解がどのように変化するのか，という問題は頻出の重要問題．判別式 D がいつ正になるのか，0 になるのか，負になるのかを調べます．得てして，最終的に 2 次不等式を解くことになるので，2 次不等式の解き方も各自で復習しておこう．

$\boxed{87}$ 「『重解』とくれば『判別式 $D=0$』」は常識としておきたいところ．なお，(2) を解くとき，まず最初に「$k\neq 1$ である」という断り書きが必要．$D=0$ を解いたとき，もし $k=1$ が出てきてしまったら「除外」せねばなりません．なぜだか分かりますよね？

注　実は，「『重解』とくれば『判別式 $D=0$』」というのは厳密には正しくありません．そう単純には済まないヤバイ場合があるのですが，それはまたそのときに説明します．

$\boxed{88}$ 「『虚数解』とくれば『判別式 $D<0$』」も常識としておきたいところ．$\boxed{87}$(2) もそうですが，判別式を利用するためには，2 次方程式を $\bigcirc x^2+\bigcirc x+\bigcirc=0$ の形にしないといけないので，まずはこの形に変形することから始めよう．

$\boxed{89}$ $\boxed{83}$, $\boxed{84}$ と基本的に同じ．でもちょっと工夫が必要です．例えば (1) や (2) は，バラバラに展開してから考えますか？それとも・・・．(3) もいきなり解の公式でいきますか？それとも，係数の雰囲気からイメージして因数分解できませんかね・・・？(4) も感動的なうまい方法がありますね．ヒントは 2 重根号．
なお，(3) と (4) の別冊の模範解答を確認しましたが，僕の解答のほうが美しいですね．やっぱり，模範解答イケてませんね．

$\boxed{90}$ こういう問題が大切です．きっちり解けるようにしておこう．まずは $\boxed{86}$ との違いを感じてほしいです．$\boxed{86}$ は問題文に「2 次方程式」と書いてありますが，今回は単に「方程式」としか書いていません．ということは，2 次方程式とは限らないわけで，判別式 D をいきなり使ってはいけません．判別式は「実数係数の 2 次方程式の場合でのみ使用可能」だからです．ということは，x^2 の係数が 0 かどうかで場合分けして考えねばなりません．
つまり，(1) は $k=0$ と $k\neq 0$ で場合分け，(2) は $k=1$，$k=-1$，$k\neq\pm1$ の 3 つの場合分けになると思います．それぞれの場合で，慎重に慎重に解答を作ってください．

$\boxed{91}$ $\boxed{90}$ と同様です．今回も 2 次方程式とは限らないので，x^2 の係数で場合分け．$k=2$，$k=-2$，$k\neq\pm2$ の 3 つの場合分けになるでしょう．

注　$\boxed{90}$(2) も $\boxed{91}$ も，「方程式 $ax+b=0$ を解け」という問題がきちんと解けるかどうかがカギ．これは数学 I の内容です．

$\boxed{92}$ 2 つの 2 次方程式に関する問題なので，$x^2+mx+m=0$ の判別式を D_1，$x^2+mx+1=0$ の判別式を D_2，というように区別した方が良いでしょう．どちらも虚数解をもつということは，「$D_1<0$ かつ $D_2<0$」ということ．ようするに 2 次不等式の解の共通部分を求めるだけ．

$\boxed{93}$ $\boxed{92}$ と同様ですが，「少なくとも一方が実数解」「一方だけが実数解」という日本語の意味を正しく把握できるかどうか．いずれにしても，2 つの 2 次方程式の判別式を D_1，D_2 として，$D_1 \geqq 0$，$D_2 \geqq 0$ を解いた結果を数直線に図示し，どの部分を選択すればよいのかを考えることになります．

$\boxed{94}$ 上の例題 9 の解説をしっかりと読むことです．「虚数解をもたない」とは，「$D<0$ ではない」つまり「$D \geqq 0$ である」ということです．$D=b^2-4ac$ が，例えば (1) なら $b=a+c$ の場合に $D \geqq 0$ となることを式変形によって証明すればよいのです．そういう意味で，この問題は前章の「式と証明」の範疇です．

$\boxed{95}$ $\boxed{86}$ と全く同じ問題文ですが，唯一の違いは登場する文字が 1 文字 (m だけ) なのか 2 文字 (a と b) なのか，ということ．とりあえず判別式 D を計算してみて，出てくる式の形をにらんで，いつ正になるのか，0 になるのか，負になるのかを考えるしかありません．

$\boxed{96}$ 重要な問題です．とりあえず判別式 D を計算してみよう．a と k の 2 文字が混在した式になるので，とりあえず「1 つの文字について整理する」という精神が求められます．次のような式になるはず．
k を主体に整理した場合

$$D=-3k^2+2ak+a^2-4a \cdots ①$$

a を主体に整理した場合

$$D=a^2+(2k-4)a-3k^2 \cdots ②$$

どちらも項の順番が違うだけで同じ式ですが，全く意味が違います．今回の場合，どちらの式を採用するべきでしょうか．問題は「どのような k の値に対しても $D<0$ となる a の範囲は？」です．ということは・・・・k を主体に考えた ① の式を採用します．つまり，① を k の 2 次関数と考えるのです．

> k の 2 次関数
>
> $$y=-3k^2+2ak+a^2-4a$$
>
> が，すべての k に対しても $y<0$ となる a の範囲を求めよ．

という問題に帰着されます．この時点で，横軸が k，上に凸の 2 次関数をイメージできていますか？この 2 次関数が k 軸よりも下にあればよいのです．ということは，k についての 2 次方程式 $-3k^2+2ak+a^2-4a=0$ の判別式がどのようになればよいのでしょうか？

本問のように，複数の文字が登場する場合に，どの文字を主体にして考えるべきなのか，という判断は難しいですが，とても大切なことです．暗記ではありません．しっかりと意味を考えて理解してください．

$\boxed{97}$ まずは上の例題 10 の解説をしっかり読むこと．何度も言ってますが，判別式は，実数係数の 2 次方程式の場合でのみ使用可能です．ということは今回は虚数係数なので判別式は全く使えません．
ポイントは「複素数の相等」です．

$\boxed{98}$ 例題 10，$\boxed{98}$ と全く同様．実数解を $x=\alpha$ として代入し，「複素数の相等」を利用します．

$\boxed{99}$ 例えば，「$x^2+3x+1=0$ の解を α とするとき，$2\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha-5$ の値を求めよ」と言われたらどうしますか？まともにやりますか？この方法がヒントです．