第 1 章　複素数平面

1　複素数平面

1 複素数平面は横軸を実部，縦軸を虚部に設定します．つまり，

$$\text{複素数 } a+bi \iff \text{点}\,(a,\ b)$$

に対応させるのです．

2 先ほども述べたように，複素数 $a+bi$ を点 $(a,\ b)$ に対応させるのだから，(1) の場合，

$\alpha=a+2i$，$\beta=6-4i$，0 が同一直線上にある

$\iff$

3 点 $(a,\ 2)$，$(6,\ -4)$，$(0,\ 0)$ が一直線上にある

ということに過ぎません．

3 この辺りから「複素数をベクトル的に見る」という考え方が有効になってきます．

$\alpha=3+i \iff \overrightarrow{a}=(3,\ 1)$

$\beta=2-2i \iff \overrightarrow{b}=(2,\ 2)$

と思えば良いでしょう．

4 複素数平面に図示してから，その点の座標を読めばどうってことありません．

一般に，共役複素数（z と $\overline{z}$）は実軸対称，符号違いの複素数（z と $-z$）は原点対称になります．虚軸対称をしたければ，実軸対称してさらに原点対称すればよいですね．

まあ，覚えるまでもなく，意味を考えれば当たり前ですけどね．

5 絶対値とは原点からの距離です．したがって，複素数 $a+bi$ を点 $(a,\ b)$ に対応させるのだから，$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ です．

また，絶対値の性質「積と商でバラせる」はかなり重要なので覚えておこう．つまり，

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

(3) や (4) では，このことを使えば計算がラクになります．つまり，(3) の場合，$(1-2i)^2$ を展開してから絶対値を計算するのではなく

$$\begin{aligned}|(1-2i)^2|&=|(1-2i)(1-2i)|\\&=|1-2i||1-2i|\\&=|1-2i|^2\end{aligned}$$

なので，$|1-2i|$ を 2 乗すれば良いのです．

(4) の場合も同様に，

$$\left|\frac{2+3i}{5-i}\right|=\frac{|2+3i|}{|5-i|}$$

とすれば，分母分子の絶対値をそれぞれ計算するだけで終了です．

6 2 点 α，β の距離は $|\alpha-\beta|$ で求められますが，結局，複素数平面上での 2 つの複素数の距離とは，座標平面上における 2 点間の距離と同じことです．つまり，2 つの複素数 $\alpha=3+4i$ と $\beta=7+5i$ の距離は，2 点 $(3,\ 4)$ と $(7,\ 5)$ の距離です．そう思えば，簡単なことです．

7 「バーはバラせる」という格言に従おう．つまり，$3z+\overline{z}=2-2i$ の両辺の共役複素数を考えると，$\overline{3z+\overline{z}}=\overline{2-2i}$ より，

$$3\overline{z}+z=2+2i$$

です．$\overline{\overline{z}}=z$ になるのは言うまでもありませんね．あとは，z と $\overline{z}$ の連立方程式のノリで考えればよいでしょう．

8 ($\Longleftarrow$) の証明は問題ないでしょう．

$\beta=k\alpha$ ならば，$\overline{\alpha}\beta=\overline{\alpha}\times k\alpha=k|\alpha|^2$ となり，実数になることがわかります．

問題は，($\Longrightarrow$) の証明です．これはなかなか思いつかないです．

ポイントは，「$\beta=k\alpha$ となる実数 k が存在する」という文章を「$\dfrac{\beta}{\alpha}$ が実数になる」と解釈できるかどうか，となれば，

$$\overline{\alpha}\beta \text{ が実数} \Longrightarrow \frac{\beta}{\alpha}\text{ が実数}$$

を示すことになります．複素数 z が実数である条件（$\overline{z}=z$ が成立する）に当てはめれば，

$$\alpha\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta \Longrightarrow \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\frac{\beta}{\alpha}$$

を証明することになります．そうなれば，単なる式変形です．

$\boxed{9}$ 素直に，$z=2-i$ を $z+\dfrac{1}{z}$ に代入して計算，$a+bi$ の形に変形し，その絶対値を求めて 2 乗する（つまり a^2+b^2 を求める）方法で解決します．「えっ？それだけ？」と思うかもしれませんが，この問題は「複素数の絶対値は実数とは違う」ということを意識させるための問題だと思います．
例えば，$\underline{x\text{ を実数}}$ とするとき，

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$$

ですが，$\underline{z\text{ を実数}}$ とするとき，$\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^2$ の計算は上のようにはなりません．
複素数の絶対値の扱いは，実数の場合とは全くことなります．つまり，

$$|z|^2=z\overline{z}$$

を利用します．ていうか，これしかありません．実数の場合は「絶対値は中身の正負で場合分けして外す」ことが基本でしたが，複素数の場合は「2 乗して，中身とその共役の積に直して外す」が基本です．
よって今回，絶対値を外すならば

$$\begin{aligned}\left|z+\frac{1}{z}\right|^2&=\left(z+\frac{1}{z}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}\\&=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)\\&=z\overline{z}+\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}+\frac{1}{z\overline{z}}\end{aligned}$$

という計算になります．途中，「バーはバラせる」という格言に従っていることにも注意してください．

$\boxed{10}$ 大切なことは「実数の絶対値と複素数の絶対値は違う」ということです．
x が実数の場合，$|x|=3$ ならば $x=\pm 3$ ですが，z が複素数の場合，$|z|=3$ ならば $z=\pm 3$ ではありません．複素数平面をイメージしてください．$|z|=3$ を満たす複素数は原点中心の半径 3 の円周上に存在します．この円の実軸との交点が ± 3 で，これが先ほどの実数の場合に相当します．
前問で説明した，複素数の絶対値の扱い ($|z|^2=z\overline{z}$) をそのまま利用します．つまり，$|z|=3$ の両辺を 2 乗すると

$$z\overline{z}=9$$

$|z-2|=4$ の両辺を 2 乗すると

$$(z-2)(\overline{z-2})=16$$

となります．さらに「バーはバラせる」ので

$$(z-2)(\overline{z}-2)=16$$

となります．これをフツーに展開すればよいのです．

$\boxed{11}$ $\alpha^2+\beta^2$ の値を求めるには，これまでの経験から，この式が対称式であることを踏まえて，和と積を考えればよいことに気づくでしょう．$\alpha+\beta+1=0$ より $\alpha+\beta=-1$．あとは積 $\alpha\beta$ をどうやって引っ張ってくるのか？
この問題でも，大切なことは，先ほどから述べているように「実数の絶対値と複素数の絶対値は違う」ということです．α は複素数なので，$|\alpha|=1$ だからといって $\alpha=\pm 1$ ではありません．やはり，複素数の絶対値の扱い ($|z|^2=z\overline{z}$) を利用します．
$|\alpha|=|\beta|=1$ の各辺を 2 乗すると，

$$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=1$$

です．つまり，

$$\overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha},\quad \overline{\beta}=\frac{1}{\beta}\quad\cdots(※)$$

$\alpha+\beta+1=0$ の両辺の共役をとると，

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}+1=0$$

なので，ここに (※) を代入してゴチャゴチャ式をいじくれば，うまいこと積 $\alpha\beta$ が出てくると思います．それだけのこと．
まあ，個人的には，こんな問題は解くべきではないと思っています．単なる記号のイジクリに過ぎず，数学的に意味がありません．こんな問題をやるから数学嫌いが増えるんですよね．困ったもんです．パスしてもいいです．やるだけ時間のムダ．
上の例題 1 も参照してください．