# 第 1 章　複素数平面

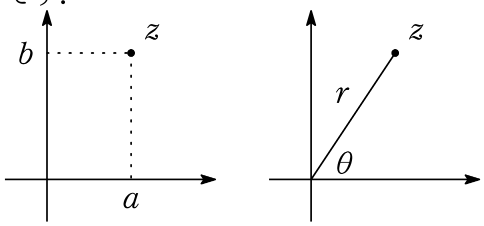
## 2　複素数の極形式と乗法，除法

$\boxed{12}$ 複素数 $a+bi$ を複素数平面上に表したとき，原点からの距離を $r$，実軸との成す角を $\theta$ とすると

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表現できます．この表記方法を極形式といいます．いうまでもなく $r$ は $|z|$ のことです．

つまり複素数は 2 通りの表現方法があるのです．




この問題は「極形式で表せ」ということなので，実際に複素数平面上に点を取って，原点からの距離と実軸とのなす角を読み取れば良いでしょう．

➾注　図示せずに，次のように純粋に計算だけで求めることも可能です．例えば (1) の場合，

$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ なので，

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす $\theta$ は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$．

したがって，$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

ちょっと，まわりくどい手法ですが，後々のことを考えると重要な方法なので，覚えておいてください．

$\boxed{13}$ 積 $\alpha\beta$ や商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を計算してから極形式に表そうとするとうまくいきません．やればわかります．必ず自分でやって「ムリだ」と実感してください．

今回は，まずは $\alpha$ と $\beta$ を極形式で表現しよう．それから積 $\alpha\beta$ や商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を考えます．

$$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$

$$\beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2$$

のとき，

$$\alpha\beta=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

つまり，複素数を掛けると偏角は足し算になり，複素数を割ると偏角は引き算になります．

このようになることは，計算でも，意味でも，「そうなる」ことを確かめておくこと．

$\boxed{14}$ $\boxed{5}$ でも紹介しましたが，絶対値の性質「積と商でバラせる」はかなり重要なので覚えておこう．つまり，

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

が成立します．

ですから，例えば (2) の場合，$\alpha\beta^2$ を計算してから絶対値を考えるのではなく，

$$|\alpha\beta^2|=|\alpha||\beta|^2$$

と変形して，$|\alpha|$，$|\beta|$ を代入します．

$|\alpha|$ や $|\beta|$ の求め方は大丈夫ですね．

$\boxed{15}$ この問題は，$z\alpha$ や $\dfrac{z}{\alpha}$ を実際に計算して直接図示したほうが早いんですが・・・複素数の掛け算や割り算の図形的意味を確認するための問題と考えて，仕方なくやりましょう．

一般に，

$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ をかける

$\longrightarrow$　原点中心に $\theta$ 回転して長さ $r$ 倍

$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ で割る

$\longrightarrow$　原点中心に $-\theta$ 回転して長さ $\dfrac{1}{r}$ 倍

です．

したがって，今回の場合，それぞれの複素数を極形式に書き直す必要があります．極形式に書けば，複素数の積や商の図形的な意味がわかってくると思います．まずは $z=\sqrt{3}+i$ を極形式であらわすと，$|z|=2$ なので，

$$z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

です．

(4) をやってみます．$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}$ を極形式に直すと $|\alpha|=\dfrac{1}{2}$ なので，

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

複素数を掛けると偏角は足し算になり，複素数の割ると偏角は引き算になります．したがって，

$$\begin{aligned}&z\alpha\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\times\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

つまり $z\alpha$ は長さ 1，偏角 $\dfrac{\pi}{2}$ のところ (つまり虚軸上) にあります．

$$\begin{aligned}&\frac{z}{\alpha}\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\div\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right)\\&=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\end{aligned}$$

つまり $\dfrac{z}{\alpha}$ は長さ 4，偏角 $-\dfrac{\pi}{6}$ のところにあります．

**16** 前問同様に，極形式に書き直して図形的意味を考えます．

(3) についてちょっと悩むかも知れませんが，

$$-i\overline{z}=\overline{iz}$$

と考え，次のように 2 回に分けて移動したと考えると良いでしょう．

$$z\longrightarrow iz\longrightarrow\overline{iz}$$

複素数を $i$ 倍すると原点中心の 90° 回転することになります．また，共役複素数とは $z=a+bi$ のとき，$\overline{z}=a-bi$ なので，複素平面上で考えれば，実軸に関する対称移動を表します．したがって，この移動は「90° 回転してから実軸対称移動する」ことになります．

**注** 次のように 2 回に分けて移動したと考えてもかまいません．

$$z\longrightarrow\overline{z}\longrightarrow-i\overline{z}$$

複素数を $-i$ 倍すると原点中心の $-90°$ 回転することになるので，この場合，「実軸対称移動してから $-90°$ 回転する」ことになります．結果的に同じになります．

**17** 条件から 3 点 O，A，B の位置関係を図示してみよう．なお，角度の取り方から 2 通りの場合が考えられるので注意しよう．

(1) は，点 A を原点の周りに $\pm\dfrac{3}{4}\pi$ 回転させると点 B になります．

(2) は，点 A を原点の周りに $\pm\dfrac{\pi}{6}$ 回転させ，長さを $\dfrac{1}{2}$ に縮めると点 B になります．

**18** (1)(2) はまずは計算して $a+bi$ の形にするとできます．角の範囲が $0\leqq\theta<2\pi$ になっていることに注意しよう．

(3)(4)(5) はちょっと意地悪な問題ですね．やらなくてもかまいません．

(3) は一瞬，何をすればよいのか戸惑いますが，基本的に極形式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ では $r>0$ なので，$-4(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$ は前についている $-4$ を $+4$ に換えねばなりません．ということは，

$$\begin{aligned}&-4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\\&=4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\times(-1)\end{aligned}$$

$\times(-1)$ は複素数平面上で原点対称移動を表しています．つまり偏角が $+\pi$ になるので・・・

(4)

$$\begin{aligned}&\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\\&=\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

現実的にはこれで全く問題ないんですが，角の範囲が $0\leqq\theta<2\pi$ にするように指示されているので，$+2\pi$ すればよいでしょう．

(5) も (3) と同じく一瞬，何をすればよいのか戸惑いますが，よ～く見てみよう．sin と cos が逆になっています．間違い探しクイズやないんやからカンベンしてほしいですね．この問題は数値で表してから考えたほうが良いでしょう．つまり，

$$2\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ を極形式であらわせばよいでしょう．それにしても前についてる数字 2 は何の意味もなかったですね．
ホンマに (3)(4)(5) は意地悪ですね．やらなくて良いですよ．

$\boxed{19}$ $\cos\frac{5}{12}\pi$ と $\sin\frac{5}{12}\pi$ の値を求めよということですが，

$$\frac{5}{12}\pi=\frac{2}{12}\pi+\frac{3}{12}\pi=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$$

なので，実戦的にはどう考えても加法定理を使うべきです．でも，今回は極形式の性質を利用せよ，ということなのでとりあえず $1+i$ と $\sqrt{3}+i$ を極形式に直してみると

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$\frac{5}{12}\pi=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$ であり，複素数をかけると偏角を足すことになるので，

$$\begin{aligned}&(1+i)(\sqrt{3}+i)\\=&\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\times2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\=&2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right)\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{2\sqrt{2}}=\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi$$

なので，$\frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{2\sqrt{2}}$ を計算して，その実部と虚部を調べればよいでしょう．

$\boxed{20}$ 重要な問題です．
授業でも紹介したように，座標の回転移動は複素数の独壇場です．複素数の知識なしに，この問題を解くのはかなりの困難でしょう．
座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を複素数平面上の点 $x+iy$ に対応させます．原点中心の $\theta$ 回転を表す複素数は $\cos\theta+i\sin\theta$ なので，

$$(x+iy)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

が点 $x+iy$ を原点中心の $\theta$ 回転した複素数です．これを展開し，実部と虚部にまとめて，座標表示に戻せばよいのです．
むしろこの問題は「座標で表示された問題でも複素数平面に置き換えて考えることができる」ことを意識するべきでしょう．

$\boxed{21}$ 前問に引き続きとても重要な問題です．
複素数 $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ は原点中心の $\frac{\pi}{6}$ 回転を表しているので，今回の場合，原点中心の回転移動ではないので，いきなりこの複素数をかけてもダメです．
考え方は単純明快で，原点に平行移動してから回転し，それからもう一度，平行移動して戻せばよいのです．
回転の中心 $\alpha$ を原点に平行移動すると，$\beta$ は

$$\beta-\alpha$$

に移動します．これを原点中心 $\frac{\pi}{6}$ 回転すると

$$(\beta-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

もとに戻すために $+\alpha$ 平行移動すればよく，

$$(\beta-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)+\alpha$$

これが求める複素数 $\gamma$ です．

$\boxed{22}$ 例題 2 を参照してください．基本的な考え方は $\boxed{21}$ と同じです．つまり，実軸に関する対称移動は

$$z\longrightarrow\overline{z}$$

ですが，今回の場合，対称軸が実軸でないので，まずは対称軸を回転して実軸にもってい

くのです ($\boxed{21}$ の回転の中心を原点に平行移動するのと同じ感覚). そして共役複素数をとり, 再び対称軸を戻せばよいのです.
本問の場合, $-1+\sqrt{3}i$ の偏角は $\dfrac{2}{3}\pi$ なので, $-\dfrac{2}{3}\pi$ 回転すれば直線 OA は実軸に移ります. そこで共役複素数を考え, 最後に $\dfrac{2}{3}\pi$ して元に戻します.
$\boxed{21}$ も同じですが, 図形と計算式の意味をしっかり考えることです. 決して難しくはありません.