第3章　関数

数学 III では様々なグラフを扱います．そこで，まず最初に，全てのグラフに共通する重要かつ基本的な事項を確認しておこう．

▷Point◁

☆グラフを描くポイント☆

$y=f(x)$ のグラフを描く際には，**定義域（x の範囲）と値域（y の範囲）を常に意識すること**が重要である．その上で，次のグラフの移動方法をマスターすること．

① グラフの平行移動

$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフは，

$$y-q=f(x-p)$$

である．つまり，x の代わりに $x-p$ を，y の代わりに $y-q$ を代入すればよい．

② グラフの対称移動

x 軸対称移動 ： y の代わりに $-y$ を代入
y 軸対称移動 ： x の代わりに $-x$ を代入
原点対称移動 ： x の代わりに $-x$ を，y の代わりに $-y$ を代入

③ 偶関数か奇関数かどうかを考える．

$f(x)$ が偶関数
$\Longleftrightarrow y$ 軸対称
$\Longleftrightarrow x\to -x$ を代入しても変わらない
$\Longleftrightarrow f(x)=f(-x)$ が成立

$f(x)$ が奇関数
$\Longleftrightarrow$ 原点対称
$\Longleftrightarrow x\to -x,\ y\to -y$ を代入しても変わらない
$\Longleftrightarrow f(x)=-f(-x)$ が成立

$f(x)$ が偶関数なのか奇関数なのか事前にわかっていれば，グラフを描く手間が大いに省ける．

以上のポイントは，これからグラフを描く際に，強力な手がかりになるのでしっかりと使えるようにしておこう．

1　分数関数

▷Point◁

☆この章のポイント☆

① 分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ のグラフの特徴を覚える．つまり，**x 軸と y 軸を漸近線とする直角双曲線である**ということ．

②1 次分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ のグラフは，$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形することで描くことができる．つまり，このグラフは $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフである．従って，漸近線も同時に平行移動するので，この場合の**漸近線は，$x=p$ と $y=q$** である．実際に図示するときは，この漸近線の他に，**x 切片，y 切片を必ず明記すること**．

③ 分数関数の方程式，不等式の問題ではグラフを利用すること．安易に分母をはらうと失敗する．

$\boxed{147}$ 特にコメントする必要ないです．グラフを正確に書くことは基本中の基本．漸近線，x 切片，y 切片を明記すること．定義域，値域もグラフから読み取ろう．なお，(5) $y=\dfrac{2x-3}{3-x}$ と (6) $y=\dfrac{2-x}{3x-2}$ は，ますはそれぞれ $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形する必要があります．計算ミスしないように．

$\boxed{148}$ 2 つのグラフの共有点の座標を求める場合は，2 つのグラフを表す式を連立させて解くのが原則です．分数関数の場合は，ありがたいことに普通に連立させて解いても構いません．でも，後ほど学習する無理関数ではそういうわけにはいかないんだなあ．

$\boxed{149}$ 問題文に何も書かれていないですが，**分数式の方程式や不等式の問題ではグラフを描いて，その共有点の座標やグラフの上下関係に注目して考えるのが基本**です．分数関数は漸近線を持っているので，そのまま安易に計算で処理しようとすると間違う可能性大です．

方程式はそれほど問題ないのですが，不等式が要注意．**勝手に分母を払ってしまうことは不等号の向きが変わるので絶対にダメ**です．グラフを利用して考えれば，いちいち場合分けする手間が省けて楽です．ホンマにグラフって便利ですね．

150 定義域から値域を求める問題．まずはグラフを正確に描こう．それからグラフを利用して考えよう．くれぐれも定義域の両端の数字を代入して終わりとしないように！その区間でのグラフの増減を見ないとわかりません．

151 今度は値域から定義域を求める問題．これも，まずはグラフを正確に描こう．それからグラフを利用して考えよう．くれぐれも値域の両端の数字を代入して終わりとしないように！その区間でのグラフの増減を見ないとわかりません．

152 $y=\dfrac{x-1}{3-x}$ と $y=\dfrac{2x}{x+1}$ をそれぞれ $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形すればよいのです．そうすれば，それぞれの漸近線が見えてきます．漸近線に注目すればどのように平行移動したものかわかるでしょう．

153 漸近線が $x=p$，$y=q$ の分数関数は $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ と表すことができます．k を忘れないように．

154 簡単そうで，なかなか厄介な問題．不等式の分母をはらう場合，分母が正または負の場合で不等号の向きが変化してしまうので，これをうまく処理するには，分母の符号変化を考えて場合分けするしかありません (上の例題 15 の解答を参照．しかし個人的にはこの解法には不満)．しかし，この場合分けが意外と面倒なのです．そこで，**両辺に分母の 2 乗をかける**ことで場合分けの手間を省くことができます (上の**参考**の解法)．

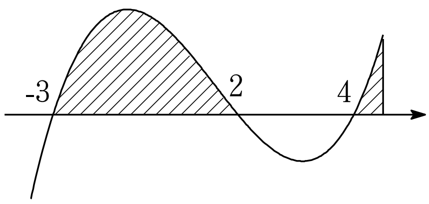
ここでは，**参考**の方法でやってみます．

(1) の場合，$\dfrac{x-4}{x^2+x-6}=\dfrac{x-4}{(x+3)(x-2)}$ なので，両辺に $(x+3)^2(x-2)^2$ をかけて

$$\frac{x-4}{(x+3)(x-2)}>0 \iff (x-4)(x+3)(x-2)>0$$

つまり，3 次関数 $y=(x-4)(x+3)(x-2)$ のグラフを考えます．

このグラフを描くためには，「微分して，増減表を書いて・・・」という一連の作業は不要です．あくまでも，y の値が正か負かが分かればよいので，x 軸との交点に注目して，簡略して描きます．この場合，$x=4,-3,2$ が x 軸との交点なので，下のような図になり，$y>0$ となる x の範囲は，グラフが x 軸よりも上の部分を読み取ればよいのです．



(2) はちょっと別の注意が必要です．

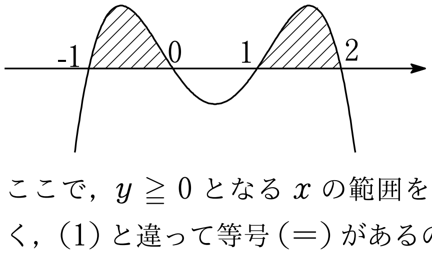
まず $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{x(x-1)}$ なので，両辺に $x^2(x-1)^2$ をかけて

$$\frac{2}{x(x-1)}\geqq 1 \iff 2x(x-1)\geqq x^2(x-1)^2$$

つまり，4 次関数 $y=2x(x-1)-x^2(x-1)^2$ のグラフを考えます．(4 次関数のグラフって知ってますか？) そのためには，この式を展開してはいけません．因数分解するのです．つまり，

$$2x(x-1)-x^2(x-1)^2=-x(x-1)(x+1)(x-2)$$

となるので，この 4 次関数は x 軸と，$x=0,\ 1,\ -1,\ 2$ で交わることが分かります．また，x^4 の係数が負なので，下のような図になります．



ここで，$y\geqq 0$ となる x の範囲を読めばよく，(1) と違って等号 (=) があるので

$$-1\leqq x\leqq 0,\ 1\leqq x\leqq 2$$

とすれば良いように思いますが。。。。。どうでしょう？

ヒントは，「定義域のチェック」です．