# 第 3 章　関数

## 2　無理関数

▷Point◁

☆この章のポイント☆

①4 つの無理関数 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x}$, $y=-\sqrt{-x}$ の位置関係を覚える.

② 無理関数 $y=\sqrt{ax+b}$ のグラフを正確に描けること. その際, 定義域, 値域に注意すること.

③ 無理関数の方程式, 不等式の問題ではグラフを必ず利用すること. 安易に 2 乗すると同値関係を崩すことになる.

**155** まずは, (1)〜(4) の 4 つグラフ $y=\sqrt{3x}$, $y=-\sqrt{3x}$, $y=\sqrt{-3x}$, $y=-\sqrt{-3x}$ を位置関係を確認しよう. (5)(6) はグラフの平行移動の原則を意識し, (1)〜(4) のどのグラフを, どのように平行移動したものなのか考えること. つまり, $x$ の代わりに何を代入したのかを意識することです.

**156** 上に同じ. どんなグラフを, どのように平行移動したものなのか考えるためには, 当然ながら, 平行移動の形が見えるように変形せねばなりません. 例えば, (1) の場合は

$$y=\sqrt{2x+2}=\sqrt{2(x+1)}$$

(3) の場合は

$$y=2\sqrt{3-x}=2\sqrt{-(x-3)}$$

と変形します.

**157** 基本は, グラフを描いてから考えるべきですが, 無理関数は分数関数と違って漸近線のない単調な関数だから, 増加か減少かだけを考えて, 両端の値を代入すれば答えは出ます. でも, やはり慎重を期するためにグラフを正確に書いて考えてほしいところ.

**158** このグラフは $y$ 軸方向の平行移動も考慮せねばなりませんねえ. まあ, それだけです.

**159** 特にヒントを出す必要もないと思いますが, どうでしょうか? ここでもやっぱりグラフのイメージは重要でしょうね.

**160** 2 つのグラフの共有点の座標を求める場合は, 2 つのグラフを表す式を連立させて解くのが原則ですが, 無理関数の場合には特に注意が必要です. **2 乗する場合に同値関係が崩れないように注意せねばなりません**. すなわち,

$$A=B \implies A^2=B^2$$

は正しいが, その逆,

$$A^2=B^2 \implies A=B$$

は正しくないからです (正しくは $A=\pm B$). つまり, $A=B$ を解くのに, 勝手に 2 乗して $A^2=B^2$ から導き出された結果には, $A=B$ と $A=-B$ の 2 つの結果が混じっていることになるのです. どちらの結果が求めるべき結果なのかを選別する必要があります.

このような混乱を避けるために, グラフを描いて考えるのです.

例えば, (3) の場合, $y=\sqrt{x+3}$ と $y=2x$ を連立させて, そのまま 2 乗すると,

$$\sqrt{x+3}=2x \quad \cdots(※)$$

$$x+3=4x^2$$

$$4x^2-x-3=0$$

$$(4x+3)(x-1)=0$$

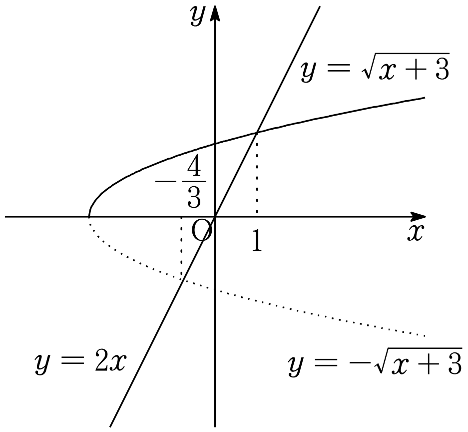
となり, $x=-\dfrac{4}{3}$, $x=1$ の 2 つの解が得られますが, $x=-\dfrac{4}{3}$ は不適です. なぜなら, 2 乗する前の式 (※) において, $x$ には条件が付加されています. つまり

$$x+3 \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad 2x \geqq 0$$

です. つまり, $x \geqq 0$.

したがって, $x=-\dfrac{4}{3}$ が不適になるのです.

このような考察はグラフを使えば一目瞭然です.




つまり, $\sqrt{x+3}=2x$ を解くために, 両辺を 2 乗して, $x+3=4x^2$ を解くと, $\sqrt{x+3}=2x$ と $-\sqrt{x+3}=2x$ の 2 つの方程式を解いたことになってしまうのです．だから，答えが 2 つ出てきてしまうのです．グラフで考えれば，上の図で本来は存在しないはずの下側のグラフとの交点を求めてしまっていた，というわけです．

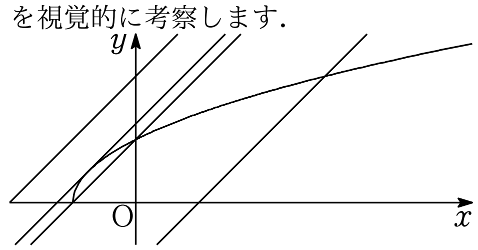
$\boxed{161}$ 先ほどの問題に同じ．無理関数は定義域や値域に制限があるので，そのまま安易に 2 乗で処理しようとすると間違う可能性大です．2 乗する場合に同値関係が崩れないように注意せねばなりません．これがかなりメンドウなんですが，グラフを描いて考えれば，いちいち同値性を考える手間が省けるので便利なのです．

**方程式や不等式の問題ではグラフを描いて，その共有点の座標やグラフの上下関係に注目して答えるのが基本**です．上の例題 16 を参照しておこう．

$\boxed{162}$ 難しいですがこの問題は重要です．要するに無理関数と直線の位置関係の問題だから，$y=\sqrt{x+1}$ と $y=x+a$ を連立させ，両辺を 2 乗して整理すると $x$ の 2 次方程式が得られます．しかし，単純に，

$D>0$ ならば交点 2 個
$D=0$ ならば交点 1 個
$D<0$ ならが交点 0 個

としては絶対にいけません．先ほども言ったように，連立させた式を 2 乗した時点で同値性が崩れているからです．したがって，ここでもグラフを描いて 2 つのグラフの位置関係を視覚的に考察します．




$\boxed{163}$ 「このタイミングで出しますか？」という意地悪な問題．個人的にはこの場所で登場させるのは止めてほしいですね．かえって混乱します．

いずれも，根号内が 2 次式になっているので，これまでの無理関数とは全く違うことを意識しよう．

考え方の基本はやはり「同値変形」です．つまり，例えば (1) の場合，

$$\begin{aligned} & y=\sqrt{4-x^2} \\ \iff\ & y^2=4-x^2,\ \ y \geqq 0 \\ \iff\ & x^2+y^2=4,\ \ y \geqq 0 \end{aligned}$$

なので, $y=\sqrt{4-x^2}$ のグラフは, $x^2+y^2=4$ の $y \geqq 0$ の部分に一致します．言うまでもなく，$x^2+y^2=4$ は原点中心，半径 2 の円です．この円の上半分というわけです．