第3章　関数

3　逆関数と合成関数

まずは『逆関数』について．逆関数の求め方に入る前に，もとの関数がどのような状態のとき (どのような条件を満たしているとき) に，逆関数が存在するのかを確認しよう．

すべての関数に逆関数が必ず存在するわけではありません．簡単に言えば，単調増加または単調減少はグラフに逆関数が存在するのです．

▷Point◁ (☆逆関数の求め方☆)

① $y=f(x)$ を変形して $x=g(y)$ の形にする．

② x と y を入れ替えて，$y=g(x)$ とする．このの $y=g(x)$ が $y=f(x)$ の逆関数であり，この $g(x)$ を $f^{-1}(x)$ とも書く．

③ $g(x)$ と $f(x)$ とでは値域と定義域が入れ替わる．

注　$y=f(x)$ において最初に x と y を入れ替えて，$x=f(y)$ としてから，$y=$ に変形してもかまいません．

次は『合成関数』について．
$f(x)$ と $g(x)$ の合成関数

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

について，式を構成することは問題ないと思いますが，定義域と値域に注意せねばなりません．

▷Point◁ (☆合成関数について☆)

$$g\circ f : x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g(f(x))$$

$(g\circ f)(x)$ の定義域は $f(x)$ の定義域であり，$(g\circ f)(x)$ の値域は $f(x)$ の値域を定義域とした場合の $g(x)$ の値域のことである．
よって，$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれている場合にのみ，合成関数 $(g\circ f)(x)$ が存在する．

164 基本問題．逆関数の求め方のルールに従うだけ．(2)(3) では**もとの関数の値域が，逆関数の定義域になる**ことに注意しよう．(3) は $x\geqq 0$ だからこそ，なんですよね．

165 基本問題．これも逆関数の求め方のルールに従うだけ．(3)(4) ではもとの関数の値域が，逆関数の定義域になることに注意しよう．

166 基本問題．これも逆関数の求め方のルールに従うだけ．問題文には何も書かれていないが，指数関数は値域が，対数関数は定義域が，すでに決まっていることに注意しよう．

167 $y=f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ と書くメリットがこのような問題を処理することで実感します．
つまり，$f^{-1}(5)=2$ の両辺に f を施して，

$$f(f^{-1}(5))=f(2)$$

として，$5=f(2)$ となります．
あたかも f と f^{-1} が打ち消しあってなくなる (正確には恒等変換になる) イメージがするでしょう？便利な表記ですね．

168 合成関数の構成問題．念のため，$g\circ f$ と $f\circ g$ の意味を紹介すると，

$$g\circ f : x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g(f(x))$$
$$f\circ g : x \xmapsto{g} g(x) \xmapsto{f} f(g(x))$$

です．できれば，$(g\circ f)(x)$ を求める場合は，$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれていること，$(f\circ g)(x)$ を求める場合は，$g(x)$ の値域が $f(x)$ の定義域に含まれていることを確認してから，合成関数を構成してほしいところ．
なお，(4) で「対数の計算の仕方がわかりませ〜ん」などと情けないことを言わないでほしいです．この計算はすでに学習済み．

$$a^{\log_a x}=x$$

が成立します．各自で証明しておきなさい．

169 もう一度，説明しますが，

$$f\circ g : x \xmapsto{g} g(x) \xmapsto{f} f(g(x))$$

です．$(f\circ g)(x)$ の定義域とは $g(x)$ の定義域であり，$(f\circ g)(x)$ の値域とは $g(x)$ の

値域を定義域とした場合の $f(x)$ の値域のことであることに注意しよう．

むしろこの問題は，$f(x) = |x| - 1$ と $g(x) = \log_{10}(1-x)$ のグラフを書くことが目的ではないでしょうか？

$\boxed{170}$ 要するに $y = \dfrac{ax-4}{x+3}$ で，x と y を入れ換えて $y=$ と変形すれば $y = \dfrac{3x+4}{bx+2}$ になるというだけです．

上の例題 17 を参照しよう．それにしても，この例題はメンドクサイ問題ですね．嫌いです．やりたくないです．正直，どうでも良いです．

$\boxed{171}$ 落ち着いて，何が何に含まれるのか考えて計算よう．基本は，

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

です．だから，

$$(h\circ(g\circ f))(x) = (h\circ g(f(x)))(x) = h(g(f(x)))$$
$$((h\circ g)\circ f)(x) = (h(g(x))\circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

となるので，

$$(h\circ(g\circ f))(x) = ((h\circ g)\circ f)(x)$$

が成立するというのは当り前のことです．このことを，具体的な関数に当てはめて実際に確認せよという問題．

$\boxed{172}$ まあ何とかなるでしょう．$f^{-1}(4) = 3$ の処理方法は $\boxed{167}$ を参照してください．

$\boxed{173}$ とりあえず，$f(x) = ax + b$ とでもおいてみれば，

$$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax+b) = a(ax+b)+b$$

ですね．これが恒等的に x に等しいわけです．

$\boxed{174}$ まずは $f(x)$ や $g(x)$ のグラフを描いて考えよう．$f(x)$ のグラフを利用して $f(-3)$ の値を読み取り，さらにその値を今度は $g(x)$ のグラフの x に値にもってきて読み取った y の値が $(g \circ f)(-3)$ です．$(f \circ g)(-3)$ も同様．

次に，$(g \circ f)(x)$ を求めるのですが，これがなかなかメンドウ．あまりにメンドウなのでやめとこう．気が向いたら犬プリで解説します．

あ〜しんどい．