第 2 章　極限

1　数列の極限

▷Point◁

∞ に関することで我々が感覚的に無条件に認めて良いことは次の 6 点のみである．**これら以外のことについては，絶対に感覚的に処理してはいけない．**

法則 ①	$\infty+\infty$	$\longrightarrow$	∞
法則 ②	$\infty\times\infty$	$\longrightarrow$	∞
法則 ③	$\infty+$(定数)	$\longrightarrow$	∞
法則 ④	$\infty\times$(正の数)	$\longrightarrow$	∞
法則 ⑤	$\infty\times$(負の数)	$\longrightarrow$	$-\infty$
法則 ⑥	$\dfrac{(\text{定数})}{\infty}$	$\longrightarrow$	0

特に，次の 2 つの形は激ヤバの代表格である．

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \infty-\infty$$

これらの「ヤバさ」をヤバくないように変形することが当面の目標．

数学 Ⅲ の極意は**とにかくやってみること**．「押してダメなら引いてみな」方式である．

175 法則 ⑥ に従うだけです．

176 (1)〜(4) はグラフをイメージすれば明らかですね．(5)〜(7) は具体的に書き出してみればわかるんじゃないですか．

177 いずれも法則 ①〜 ⑥ を考えるだけ．(3)(4) は厳密には「ハサミウチの原理」を用いるのですが，ここでは感覚的に判断しよう．(10)(11)(12) も質問が多いんですが具体的に書き出せばわかるでしょう．

178 ヤバイ代表格 $\dfrac{\infty}{\infty}$ タイプ．このタイプの処理方法は**テキトーな項で分母分子を割ってみて，法則 ①〜 ⑥ が使えないかどうか考えること**．特に法則 ⑥ が重要な役割を果たすでしょう．何で割るかというと，これまた**カン**．とにかく何かで割ってみて，うまくいかなかったら別のもので割るだけ．やっぱり「押してだめなら引いてみな」方式です．

たとえば (4) の場合，n で分母分子を割ると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{n}}{n+\dfrac{1}{n}}=\frac{3}{\infty+0}=0$$

n^2 で分母分子を割ると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{1+0}=0$$

いずれも，うまくいっていることがわかります．

たまたまどちらで割ってもうまくいきましたが，うまくいかない場合もあります ($\boxed{179}$(4))．ダメならやり直せばよいのです．

179 (1)〜(3) はヤバイ代表格 $\infty-\infty$ タイプ．このタイプの処理方法は**テキトーな項でくくりだして，法則 ①〜 ⑤ が使えないかどうか考える**ことです．何でくくりだすかというと … **カン**です．とにかく何かでくくってみて，うまくいかんかったら別のものでくくりだす，いわゆる，「押してだめなら引いてみな」方式で．たとえば (1) の場合，n でくくると，

$$\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n)=\lim_{n\to\infty}n(3n-2)=\infty\times\infty=\infty$$

n^2 でくくると，

$$\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(3-\frac{2}{n}\right)=\infty\times3=\infty$$

いずれも，うまくいっていることがわかりますね．とにかく，テキトーに何かでくくってみること．ダメならやり直せばよいのです．

(4)〜(6) は $\boxed{178}$ と同じ分数タイプですが，分母分子の次数に違いがあるのですが，まあそんなことはどーでもいいでしょう．

さて，(4) の場合，n^2 で分母分子を割ると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{5n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{3}{n}}{\dfrac{5}{n}+\dfrac{4}{n^2}}=\frac{1-0}{0+0}=\frac{1}{0}???$$

と，失敗します．そこで，n で分母分子を割ると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{5n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{5+\dfrac{4}{n}}=\frac{\infty}{5+0}=\infty$$

と，うまくいきます．
このように，うまくいかない場合であっても，やり直せばよいのです．

$\boxed{180}$ $\sqrt{\quad}$ を含んだタイプは，有理化すれば，どういうわけだかうまくいくことが多いのです．しかし，**そもそも，なぜ有理化をしようと思うのかというと，それは，ヤバイ代表格 $\infty-\infty$ タイプが含まれているからであって，これを解消する一つの手段として有理化をするのです．$\infty-\infty$ がなければ有理化の必要はありません．** つまり (1)(2) は有理化の必要なし．これらは $\dfrac{\infty}{\infty}$ タイプです．だから $\boxed{178}$ 同様に，分母分子を何かでテキトーに割るだけなのです．

$\boxed{181}$ いわゆる「ハサミウチの原理」を利用する典型例．
(1) は，$-1 \leqq \cos\dfrac{n\pi}{4} \leqq 1$，
(2) は，$-1 \leqq \sin^2 n\theta \leqq 1$，
であることを利用しよう．

$\boxed{182}$ $\boxed{179}$ と同様．**ヤバイ代表格 $\infty-\infty$ タイプが含まれているから，これらを解消する一つの手段として有理化します．** (3) に悩むかもしれません．ヤバイ代表格 $\infty-\infty$ を解消する一つの手段として有理化するのだから，この場合，分母と分子にそれぞれ $\infty-\infty$ があるから，分母と分子それぞれを有理化しないとダメですね．つまり 2 回有理化するわけです．

$\boxed{183}$ まずは，分母や分子にある和の形を計算せねばならなりません．和を求める場合は一般には Σ 計算ですが，この問題の和は全て等差数列の和なので，わざわざ Σ を持ち出す必要もないでしょう．和が計算できたら，あとは，これまでの指針どおり，ヤバイ代表格 $\infty-\infty$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ タイプを解消するために，割ったり，くくったり，いろいろすることになります．

$\boxed{184}$ 大切な問題です．このような問題では**想像力と創造力が必要不可欠．** グラフをイメージすることもその助けになるでしょう．
(1) は，常に 5 より大きいが最終的に 5 に収束する数列を求めよということです．ヒントは $y=\dfrac{1}{x}\,(x>0)$ のグラフ．このグラフはつねに $y>0$ だが最終的に $y\to 0$ に収束しているので，これに少し手を加えれば，常に 5 より大きいが最終的に 5 に収束する数列を作ることができるでしょう．
(2) は，$\{a_n\}$ は収束しないが $\{{a_n}^2\}$ が収束するので，a_n の中に $(-1)^n$ が含まれていることに気づくこと．あとは各項が異なればよいのだから，好きな式をくっつけておけばよいです．

$\boxed{185}$ これも大切な問題．前問同様，**想像力と創造力が必要不可欠．**
(1) と (2) はヤバヤバ．あかんに決まってます．反例もすぐに見つかるでしょう．(3) と (4) はムツカシイ．(3) は，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(c_n-b_n)=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ であるといえたら，ハサミウチの原理より $\{a_n\}$ が収束すると言えるのですが・・・はたして，そうでしょうか．つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(c_n-b_n)=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ をバラして $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n-\lim_{n\to\infty}b_n=0$ として良いのでしょうか．
(4) は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ であるといえるでしょうかね．

$\boxed{186}$ いきなり変な解答を紹介します．
$\boxed{\text{変な解答}}$
「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ」というんだから，これを α とでもおこう．すると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5}{2a_n+1}=\frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+5)}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2a_n+1)}=\frac{\alpha+5}{2\alpha+1}=3$$

これを解いて，$\alpha=\dfrac{2}{5}$ である．終わり．
裏の答と同じなので一見よさそうに見えますが，減点どころか 0 点の解答です．この解答のどこにヤバイ箇所があるかわかりますか．
なぜ，下のヒントのように，$b_n=\dfrac{a_n+5}{2a_n+1}$ とおき，a_n を b_n で表す必要があるのでしょうか．