第2章　極限

2　無限等比数列

▷Point◁

無限等比数列 $\{r^n\}$ の (一般項の) 極限のようすを正確に暗記すること．

$r > 1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$
$r = 1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n = 1$
$|\,r\,| < 1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$
$r \leqq 1$ のとき　振動 (極限はない)

この結果から，無限等比数列 $\{r^n\}$(の一般項) が収束するのは

$-1 < r \leqq 1$

ときであることがわかる．

187 上のポイントに従うだけ．

188 無限等比数列 $\{r^n\}$ が収束するのは $-1 < r \leqq 1$ ときです．したがって，とりあえずは式の中に -1 より大きく 1 以下の数の n 乗を作ることを目標に変形するのですが，その際に，分母が 0 にならないように十分注意すること．なお，$\dfrac{\text{定数}}{\infty} = 0$ も利用しよう．たとえば，

(1) は分母分子を 2^n で割ります．

$$\frac{3\cdot 2^n - 5}{2^n + 3} = \frac{3 - \dfrac{5}{2^n}}{1 + \dfrac{3}{2^n}} \longrightarrow \frac{3 - 0}{1 + 0}$$

(2) は分母分子を 3^n で割っても 2^n で割っても構いません．例えば 3^n で割ってみると，

$$\frac{2^n}{3^n - 4} = \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1 - \dfrac{4}{3^n}} \longrightarrow \frac{0}{1 - 0}$$

(3) は分母分子を 3^n で割ろう．この場合は，2^n や 4^n で割るとダメです (なぜダメなのかは実際に割ってみて各自考えよう)．

$$\frac{2^{2n} - 1}{3^n + 5} = \frac{4^n - 1}{3^n + 5} = \frac{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n - \dfrac{1}{3^n}}{1 + \dfrac{5}{3^n}}$$

などなど．

189 まずは，初項が 0 でないことを意識し，公比 r を x で表そう．無限等比数列 $\{r^n\}$ が収束するのは $-1 < r \leqq 1$ ときですが，$-1 < r < 1$ と $r = 1$ で収束先が異なることに注意しよう．

190 問題集下のヒントを参照のこと．
(1) は $-1 < \dfrac{x}{1 + 2x} \leqq 1$ を解くことになりますが，勝手に分母をはらってしまわないように．
(2) は無限等比数列 $\{ar^n\}$ の収束条件なので，初項 a が 0 かどうかで場合分けせねばなりません．

191 無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限の様子を r による場合分けを思い出そう．(1)(2)(3) で r に始めから制限が付いているので，その部分は除外して考えます．始めはなるべく r で細かく場合わけして考えたほうがよいでしょう．細かく場合分けして最後に同じ結論をまとめるのです．(3) に悩むかもしれません．途中で $\dfrac{1}{r^n} = \left(\dfrac{1}{r}\right)^n$ と考えることがポイント．

192 無限等比数列 $\{r^n\}$ が収束するのは $-1 < r \leqq 1$ ときです．この問題の場合，公比 $r = \dfrac{x}{x^2 + 2p}$ なので，$-1 < \dfrac{x}{x^2 + 2p} \leqq 1$ が全て実数 x で成立するような p の範囲を求めよということ．この問題の場合は $p > 0$ なのでそのまま分母をはらっても問題ないです．したがって，不等式

$$-x^2 - 2p < x \leqq x^2 + 2p$$

が全ての実数 x で成立するような p の範囲を求めることが目標．本質的に数学 I の範囲ですね．

193 まずはそれぞれの漸化式を解こう．基本中の基本．これが解けないと理系の資格なし！a_n を n で表すことができれば，$n \to \infty$ とすれば数列 $\{a_n\}$ の極限が分かります．なお，極限を求めた後，もとの漸化式で

$a_n = a_{n+1} = \alpha$ とおいて α を求めてみよう．そして何かを感じ取ろう．

194 分数タイプ（分子が a_n の項のみ）の漸化式も基本中の基本．a_n を n で表すことができれば，$n \to \infty$ とすれば数列 $\{a_n\}$ の極限が分かります．なお，極限を求めた後，もとの漸化式で $a_n = a_{n+1} = \alpha$ とおいて α を求めてみよう．そして何かを感じ取ろう．

195 一般の分数タイプの漸化式．このタイプはノーヒントで出ることはなく必ず誘導がつきます．今回の場合，$b_n = \dfrac{1}{a_n - 2}$ とおくよう指示されているので，これをうまく用いて b_n に関する漸化式を作ることを目標にします．しかし，なぜ $b_n = \dfrac{1}{a_n - 2}$ とおくのでしょうか．
一般の分数タイプの漸化式を本質を理解している人は，なぜ $b_n = \dfrac{1}{a_n - 2}$ とおくのか，どのような変形をすれば b_n の漸化式が得られるのかわかるのですが，本質を知らない人は，やや計算が面倒ですが確実な方法で臨むしかありません．つまり，$b_n = \dfrac{1}{a_n - 2}$ を $a_n = \dfrac{1}{b_n} + 2$ と変形して，もとの漸化式に代入するのです．まずは b_n を求めてから a_n を求めよう．$n \to \infty$ とすれば数列 $\{a_n\}$ の極限が分かります．
なお，一般の分数タイプの漸化式については犬プリで詳しく解説しましたね．

196 3 項間の漸化式は以前に犬プリで説明済み．そちらを参照にしてください．**まずは $a_{n+2} = t^2$，$a_{n+1} = t$，$a_n = 1$ とおいて t の 2 次方程式を立てる**のでした．

197 3^n を作りだすために，とりあえず，問題文の式に $h = 2$ を代入してみよう．すると，

$$3^n \geqq 1 + 3n + \frac{9n(n-1)}{2}$$

この式を変形して，$\dfrac{n}{3^n}$ をうまく何かでハサメないでしょうか．
なお，この問題は証明もさることながら結果をしっかりと理解し，できれば暗記しておきたいところ．この問題の結論は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$．このことは **$n$ よりも 3^n の方がはるかに大きいということ**，つまり n も 3^n も同じ ∞ に発散するが，∞ にも大小があることを意味しています．一般に，指数関数 a^x のほうが一般の n 次関数（いわゆる整関数）よりも圧倒的に大きいのです．つまり

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{整関数}}{\text{指数関数}} = 0$$

が成立します．このことは覚えておいたほうがよいです．

198 このタイプの漸化式は初登場ですが犬プリで解説済み．**指数型 $a_{n+1} = {a_n}^p$ タイプは，両辺の対数をとる**ことで通常の等比数列に変形できるのでした．例えば，10 を底とする対数をとると，

$$\log_{10} a_{n+1} = \log_{10} a_n^p = p \log_{10} a_n$$

ここで $\log_{10} a_n = b_n$ とおけば，

$$b_{n+1} = pb_n$$

となり，$\{b_n\}$ が等比数列になります．