第 2 章　極限

3　無限級数

▷Point◁(☆無限級数の和☆)

無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

が収束するか発散するかは，**部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ が収束するか発散するかで決まる．**

つまり部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めて (すなわち n の式で表して)，S_n の極値を考える (すなわち $\lim_{n \to \infty} S_n$ を計算する)．S_n が収束するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束して和をもち，この極限値を無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和と定める．

S_n が収束しなければ，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散し，和は存在しない．

▷Point◁(☆無限等比級数の和☆)

初項 a，公比 r の無限等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ は，$a = 0$ または $-1 < r < 1$ のときに限り和をもつ．その和を S とすれば，

$a = 0$ のときは，r が何であっても $S = 0$ に収束

$a \neq 0$ のときは，$-1 < r < 1$ のとき，$S = \dfrac{a}{1-r}$ に収束

▷Point◁(☆収束判定☆)

☆無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束判定条件☆

$$\text{無限級数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{が収束する} \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

対偶をとって，

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \text{無限級数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は収束しない}$$

$\boxed{199}$ いずれも，まずは部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めて (すなわち n の式で表して)，この極値を考えます (すなわち $\lim_{n \to \infty} S_n$ を計算)．

(1) は $a_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}$，$a_2 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4}$，$\cdots$，$a_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n+2}$ と考えます．部分和 S_n は縦書きをすることで求められますね．

(2)(3) はいずれも分数タイプの和なので，部分分数に分けることで部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めることができます．

(4) は分母の有理化．その後，縦書き．

以上のように，分数型の和の求め方は典型的なパターン問題ですね．

$\boxed{200}$ 初項 a，公比 r の無限等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ は，$a = 0$ または $-1 < r < 1$ のときに限り和をもちます．

この問題の場合，いずれも初項は 0 ではないので，公比を調べるだけでよいですね．なお，和は $S = \dfrac{\text{初項}}{1-(\text{公比})}$.

$\boxed{201}$ 前問同様．いずれの無限等比級数も初項が 0 ではないので，公比だけを調べればよいです．なお，和は $S = \dfrac{\text{初項}}{1-(\text{公比})}$.

$\boxed{202}$ 前問同様．いずれの無限等比級数も初項が 0 ではないので，公比だけを調べればよいです．すぐに公比が分からない場合は，実際に適当な 2 項の比を調べるしかないですね．

$\boxed{203}$ 初項 a，公比 r の無限等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ は，$a = 0$ または $-1 < r < 1$ のときに限り，収束して「和」をもちます．

(1) は初項が 0 ではないので公比だけを調べればよいです．

(2) は初項 x，公比 $2 - x$ ですね．初項が 0 である可能性があります．

$\boxed{204}$ 特にコメントなし．中学校でやったんとちゃいますか？正直，どうでもいい問題．

$\boxed{205}$ 例えば (1) で，いきなり

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

としてはいけません．$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ と $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ が収束する場合にのみ，このように Σ 記号の展開ができるのです．したがって，まずは，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ と $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ が収束することを確認したうえで，展開して計算せねばならないのです．

206 これまで同様に，部分和を求めようとしてもできません．部分和が求められない場合はどうするのか？

ザックリ言うと，高校段階では，部分和が求められない場合は，たいてい発散します．つまり収束しません．このことをどのように示すのか？

それは，無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ の収束判定条件

$$\text{無限級数}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{が収束する}\implies\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

対偶をとって，

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0\implies\text{無限級数}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{は収束しない}$$

に従います．つまり**一般項 a_n が，これが 0 に収束しなかったら，無限級数は収束しないのです．**

➾注　もちろん，世の中には「部分和が求められないが収束する無限級数」が多数存在しますが，高校段階でそれらの「和」を求めることは不可能なのです．

207 基本通り．部分和 S_n を n で表して，$\lim_{n\to\infty}S_n$ を調べます．部分和 S_n を n で表すところは数列分野の問題．k 番目を k の式で表して Σ 計算．

208 $\frac{1}{a_n}=b_n$ とおいて考えよう．『数列』のところでもやりました．この場合は階差数列タイプですね．

209 初項 a，公比 r とおいて条件を式に表そう．「収束する」と書いてあるので和は $\frac{a}{1-r}$ です．

210 公比が $\frac{1}{7}$ なので，無限等比級数は収束し，和も求まります．あとは，やや計算が面倒なものの，やってることは単純です．

211 正直，どうでもいい問題．まずは循環小数をそれぞれ分数の形で表すこと．$\boxed{204}$参照．

212 まずはこれが無限等比級数であることに気づくことが大切．初項 $\sqrt{x}$，公比 $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ であるので，$x\geqq 0$ に注意して，無限等比級数の収束条件をつねに満たしていることを示せばよいでしょう．つまり，

$x=0$ のときは，常に収束し和は 0．つまり $f(0)=0$

$x>0$ のときは，$-1<\frac{1}{1+\sqrt{x}}<1$ ならば収束しますが，この不等式は常に成立するので，$x>0$ のときは必ず収束することがわかります．和は $\dfrac{\sqrt{x}}{1-\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}}$．これが $f(x)$ です．

213 これも，前問に同じ．初項 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，公比 $\sin^2 x$ の無限等比級数です．まずは無限等比級数の収束条件を考えよう．なお，公比が $\sin^2 x$ なので，$0\leqq$ 公比 $\leqq 1$ ですね．

$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x=0$，すなわち $x=\frac{n\pi}{2}$ のとき，常に収束し和は 0．つまり $f\left(\frac{n\pi}{2}\right)=0$．

$x\neq\frac{n\pi}{2}$ のとき，$-1<\sin^2 x<1$ で収束しますがこれは常に成立しているので，もとの無限級数は必ず収束し，和は $\frac{\sin x\cos x}{1-\sin^2 x}$．これが $f(x)$ です．

214 三角関数が含まれているので一瞬ギョッとするしますが，各項を書き出してみれば単純な無限等比級数ですね．

215 (1)(2) をしっかりと区別すること．

(1) は初項 x^2-2x，公比 x^2-2x の無限等比数列の収束の様子

(2) は初項 x^2-2x，公比 x^2-2x の無限等比級数の収束の様子

をそれぞれ調べよ，ということです．無限等比数列と無限等比級数の収束条件は似ているがちょっと違いましたね．
それにしても，どうしてこんなに紛らわしい問題を一緒にならべるのかなあ？

216 初項 1，公比 $-(x+y)$ の無限等比級数が収束し，和が $\dfrac{1}{1-x}$ であることから

$$\frac{1}{1+(x+y)}=\frac{1}{1-x}$$

が成立します．このことから x と y の関係式が出てきます．収束条件を忘れないようにしよう．

217 久しぶりに出たミックスジュースタイプ！「ミックスジュースはコーヒーをかけて引く」という名言 (迷言?) がありましたね．まずは，部分和 S_n を求めましょう．

218 奇問．この問題は物理学者と数学者と哲学者で見解が異なります．物理学者は「エネルギーの減少に伴いボールはいずれ必ず静止する」と言うでしょうし，数学者は「永遠に跳ね返り続けるのでボールは静止しない」と言うでしょう．哲学者は「アキレスと亀の話を知っているかい？」と無限論について語りだすかもしれません．まあ，あまり深入りせずに，サラッと解けということかな．

219 x 座標と y 座標を別々に考えよう．まずは x 座標だけに注目すると，点はどのような動きをしているでしょうか．x 座標が増えたり減ったりを繰り返してますね．

220 円 O_n の半径を r_n とおいて，r_n を n の式で表そう．そのためには，r_n についての漸化式を作らねばなりません．**図を丁寧に書いて，円 O_n と円 O_{n+1} が外接する場合の中心間の距離と半径との関係を調べよう．**

221 問題文に三角形の辺や角に関する情報が全く与えられていないので，$\angle C=\theta$ とでもおいてみよう．次に $\triangle\mathrm{CAB}, \triangle\mathrm{CAA_1}, \triangle\mathrm{CA_1A_2}$ … これらは全て相似形であることに注目しよう．$\triangle\mathrm{CAB}$ の面積を S とすれば，相似比さえわかれば全ての三角形の面積が S で表現できます．

222 上の例題 20 を参照のこと．今はとばしても構いません．どうしても気になる人は，僕に聞きにくるか，理学部数学科に進学するかしてください．

223 昔，東大の入試で似たような問題が出ました (1990 年前期理系 1 番)．積分の面積を利用した解答がベストであると思われますので，その解答でやります．よって，今はやる必要なし．