第 4 章　極限

4　関数の極限

関数の極限の計算は，この後，微分法を学習していろいろな関数のグラフを書くときに必要になってきます．だから「グラフを書く」という目標なしに，関数の極限だけ求めてもピンとこないと思います．もう少し学習を進めれば，極限の計算それぞれに意味があることがわかってくるので，今のところは「まあ，こんな感じ」程度にスルーしてかまいません．くれぐれもここの分野を学習しただけで「数学 III はムズイ．私には無理」と思わないでください．例年，ここであきらめる生徒さんが多いんですよね．もったいない話です．

▷Point◁

① 関数の極限の求め方は，**まずはそのまま代入してみる**こと．代入してうまくいかないとき（ほとんどが分母も分子も 0 になる）は，

- 因数分解して約分
- $\sqrt{}$ がらみは有理化
- それでもダメならグラフ考察

に従う．

② $y=\dfrac{1}{x}$ と $y=\dfrac{1}{x^2}$ のグラフの形をおぼえる．その上で，次の極限をおぼえる．

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,\qquad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$$

つまり，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$ は存在しない．

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\qquad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

つまり，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

③ 絶対値関数のグラフ $y=|x|$ とガウス記号の関数 $y=[x]$ の形をおぼえる．$y=|x|$ は連続関数だがガウス記号の関数 $y=[x]$ は不連続関数である．このことが極限値を求める際に重要な意味をもってくる．

224　この問題はそのまま代入するだけです極限が求まられますが，あくまでも「その値に近づいている」という意識をもつことが大切です．

225　そのまま代入すると分母も分子も 0 になるタイプ．この問題では，すべて分母か分子が因数分解できて約分ができます．「なぜ約分できるのか」という質問にきちんと答えられるようにしといてください．

226　これもそのまま代入すると分母も分子も 0 になるタイプ．この問題では，$\sqrt{}$ が含まれているので有理化すればうまくいくはず．

227　今回は，そのまま代入する分子は 0 にならないけど，分母 $=0$ になるタイプです．グラフをイメージして解きます．
基本は，$y=\dfrac{1}{x^2}$ のグラフの形と

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

です．これは暗記しておくべき極限値です．
(1) について．$y=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ のグラフは $y=\dfrac{1}{x^2}$ のグラフを $x\to3$ だけ平行移動したものです．なので，

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2}=+\infty$$

(2) について．

$$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}(x+1)\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$$

と解釈します．$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}$ は，(1) と同様に，$y=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ のグラフ（$y=\dfrac{1}{x^2}$ のグラフを $x\to1$ だけ平行移動したもの）をイメージすれば，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ になることがわかります．
さらに，$\displaystyle\lim_{x\to1}(x+1)=2$，なので，求める極限値は $+\infty$ になります．
(3) も (2) と同様です．$y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ のグラフをイメージします．分子は -2 に近づいてますね．
✎**注**　細かいことを言えば，ここが高校数学のアキレス腱です．

> $y=\dfrac{1}{x^2}$ のグラフより
>
> $$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$
>
> つまり，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ である

というギロンが曖昧 (ていうかドウドウ巡り) であることに気づいていますか.
「$y=\dfrac{1}{x^2}$ のグラフより」とありますが，なぜ $y=\dfrac{1}{x^2}$ のグラフがああいう形になるんでしょう．それは，

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

だからです．つまり，極限値の計算の結果を受けて，あのような形になることがわかるのです．じゃあ，その極限値はどうやって求めるのか.「グラフより求める」となれば，完全な循環論法になってしまいます.
本来は，グラフを用いずに

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

であることを証明すべきなのですが，これは高校段階では無理です.
なので，この問題も「グラフを利用して解く」のは厳密にはアウトです.

228 前問に同じく，そのまま代入すると分子は 0 にならないけど，分母 $=0$ になるタイプ．因数分解も有理化もダメです．よってグラフをイメージして解きます.

> $$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$$
>
> つまり，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$ は存在しない.
>
> $$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$
>
> つまり，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

を利用します.

(1) は $y=\dfrac{1}{x-2}$ のグラフをイメージしよう．何をどのように平行したものなのかは説明するまでもないでしょう.
(2) は $\dfrac{x}{(x-2)^2}=x\cdot\dfrac{1}{(x-2)^2}$ と解釈します.
そのうえで $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ のグラフをイメージしよう.
(3) は $\dfrac{1}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{x+2}\cdot\dfrac{1}{x-2}$ と解釈すればよいでしょう．つまり 2 つのグラフ $y=\dfrac{1}{x+2}$ と $y=\dfrac{1}{x-2}$ をそれぞれ考えます.

229 そのまま代入すると 分母 $=0$ などになるタイプ (分子は 0 になったりならなかったり).
因数分解も有理化もダメなので，やっぱりグラフ考察をします．絶対値関数のグラフ $y=|\,x\,|$ とガウス記号の関数 $y=[x]$ の形は基本中の基本.
(1) は $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフをただ単に平行移動しただけです.
(2) は $\dfrac{x-1}{x^2-3x}=\dfrac{x-1}{x(x-3)}=\dfrac{1}{x}\,\dfrac{x-1}{x-3}$ と分けて考えます．$\dfrac{x-1}{x-3}$ の部分はちゃんと収束しているので，$\dfrac{1}{x}$ の部分を考えます.
$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフをイメージすればよいでしょう.
(3) は無理関数のグラフを考えれば終わりです.
(4) は $x\to-0$ より $x<0$ なので絶対値が外れますね.
(5) も同様．$x\to-3-0$ より $x<-3$ なので絶対値が外れます.
(6) はガウス記号の関数のグラフをイメージすること.

230 (1)(4) はそのままグラフを考えれば全く問題ないですが，(4) は

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{2}{x^2}-1\right)$$

と解釈したほうが明解かもしれません．ちょっと前にも言ったけど「グラフより」というのは厳密にはダメなので，避けれるならば避けたほうが良いからです.

それ以外は，$x \to -\infty$ の極限の求め方なので少し注意が必要．そのままでもできないことはないですが，$x=-t$ **と置き換えして，** $x \to -\infty$ **を** $t \to \infty$ **に変更して考えた方が安全**です．

$\boxed{231}$ $\boxed{229}$(4) と同じようなタイプ．これも，「グラフより」とするのは避けたいですね．

$\boxed{232}$ $\boxed{178}$を思い出そう．
$x \to \infty$ のときに，$\dfrac{\infty}{\infty}$ になる場合は分母分子を何かテキトーなもので割るのは，これまでに同じ．ただし，$x \to -\infty$ の極限の場合は少し注意が必要です．そのままでもできないことはないですが，$x=-t$ **と置き換えして，** $x \to -\infty$ **を** $t \to \infty$ **に変更して考えた方が安全**です．

$\boxed{233}$ ヤバイ代表格 $\infty - \infty$ タイプ．$\sqrt{}$ がらみは有理化すればうまくいくことが多いのです．特に (4) に注意しよう．前問同様に $x=-t$ **と置き換えして，** $x \to -\infty$ **を** $t \to \infty$ **に変更して考えた方が安全**です．

$\boxed{234}$ (1)〜(4) は指数関数，対数関数のグラフをイメージすればわかるはず．(5)〜(7) は，ヤバイ代表格 $\infty - \infty$ タイプですが，この手の処理方法はこれまでに何度も登場しています．なお (7) は対数の性質より $\infty - \infty$ タイプを解消できます．
$\boxed{187}$や$\boxed{189}$(5) などを思い出そう．

$\boxed{235}$ 極限値の計算で忘れてならないのは，まずはそのまま代入すること．代入しても 分母 $=0$ になってうまくいかないから有理化するのです．いきなり有理化するのではありません．
(4) は 3 乗根の有理化．$\sqrt{x}-\sqrt{y}$ の場合は，単なる符号違いの $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ をかければよかったですが，$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$ の場合は何をかければよいのでしょうか．有理化とは，符号違いのものをかけることではありません．$\sqrt{}$ や $\sqrt[3]{}$ を消すためのものをかけることです．$\sqrt{}$ の場合は，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ の因数分解が根底にあったからです．$\sqrt[3]{}$ の場合は，どういう因数分解が根底にあるのでしょうか．$a^3-b^3=\cdot\cdot\cdot$ どうでしたっけ．

$\boxed{236}$ $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと，その極限値

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$$

つまり，極限値 $\lim x \to 0\dfrac{1}{x}$ は存在しないことがヒントになっています．問題の 3 つの関数の内部にこれらの極限値が含まれていることに気づくことがポイントですが，入っているからといって即「極限値はない」と早合点しないこと．なぜなら，例えば

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{1}{x}}$$

の場合，分母部分に極値は存在しませんが，全体としては 0 に収束するからです．
したがって，$x \to +0$，$x \to -0$ の場合をそれぞれ吟味すべきです．
$\boxed{228}$がヒントになるでしょう．
(1) は $\dfrac{x-2}{x^2-x}=\dfrac{x-2}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x}\dfrac{x-2}{x-1}$ と分けて考えます．$\dfrac{x-2}{x-1}$ の部分はちゃんと収束しているので，$\dfrac{1}{x}$ の部分を考えます．$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフをイメージします．
(2)(3) は・・・・何とかなりますかね．$\dfrac{1}{x}$ をひとまとめに考えることがポイント．

$\boxed{237}$ なかなか難しい．a によって場合わけが必要です．これもやっぱり $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと，その極限値

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$$

がヒントになっています．
いずれも $\dfrac{x-a}{x^2-1}=\dfrac{x-a}{(x+1)(x-1)}$ と分けて考えることがポイント．さて，このあとどうするか．a の値によっては，分子 $(x-a)$ が分母を約分できる可能性がありますよね．約分できたらまた状況は変わってきます．ということは，まずは約分できるかどうかで場合分けすべきですね．

$\boxed{238}$ ガウス記号の関数 $y=[x]$ のグラフをイメージすること．$y=[x]$ のグラフは不連続関数なので，**くれぐれもそのまま数字を代入して終わり，としないように！**
別途，犬プリで解説します．
なお，ガウス記号は本来，整数問題で扱われるものであり，不連続な関数の代名詞のように登場するので，なんだかヤヤコシイ嫌な思い出だけが残ってしまうのですね．これはとても残念なことです．

$\boxed{239}$ (1) はとにかく $x\to-\infty$ タイプなので，$x=-t$ と置き換えして，$x\to-\infty$ を $t\to\infty$ に変更します．分母が $\infty-\infty$ タイプでどうしようにないので，当然，有理化ですね．
(2) も $\infty-\infty$ タイプを含んでいるので，当然，有理化．
(3) はなんだかとても難しそうですが，まずは $\log_3$ でまとめて対数を一つにしよう．

$\boxed{240}$ 重要な問題．

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha \text{ かつ } \lim_{x\to a}g(x)=0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)=\alpha\times 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=0$$

であることを利用します．なお，**この関係は逆は成立しません，すなわち必要条件であることに注意**しよう．
(1) の場合，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+a}{x}=\alpha \text{ かつ } \lim_{x\to 0}x=0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+a}{x}\times x=\alpha\times 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}(\sqrt{1+3x}+a)=0$$
$$\Longrightarrow \sqrt{1+0}+a=0$$
$$\Longrightarrow a=-1$$

と a が求まりますが，**ここで求めた a の時にで確かに有限の値に収束していることを確認する必要があります (十分条件)．**

$\boxed{241}$ 前問同様．今度は a と b と 2 つの文字があるので，まずは a と b の関係式を求めて，元に戻す方法をとります．
(1) の場合，

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+bx}{x-2}=1 \text{ かつ } \lim_{x\to 2}(x-2)=0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{ax^2+bx}{x-2}\times(x-2)=1\times 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 2}(ax^2+bx)=0$$
$$\Longrightarrow 4a+2b=0$$
$$\Longrightarrow 2a+b=0$$

と a と b の関係式がわかります．この関係式から $b=-2a$ として元の式に代入して，実際に 1 に収束するように a を定めるのです．
(4) は $x=\dfrac{1}{t}$ と置換してみよう．すると，$x\to\infty$ のとき $t\to 0$ となるので，これまでと同様の処理が可能です．なお，(4) の極限計算にはもう一つ別の意味が込められています．ヒントは「双曲線の漸近線」．また後日，説明しましょう．

$\boxed{242}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3 \text{ かつ } \lim_{x\to 0}x=0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\times x=3\times 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x}=-1 \text{ かつ } \lim_{x\to 0}x=0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x}\times x=-1\times 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1}f(x)=0$$

よって，$f(x)$ は $x(x-1)$ を因数にもつことがわかります．$f(x)$ は 3 次関数なので，結局，

$$f(x)=x(x-1)(ax+b)$$

とおけるのですね．

$\boxed{243}$ $\boxed{94}$ では，$f(x)$ は 3 次関数と問題に書いてありましたが，今回は何の指定もありませ

ん．よって，まずは $f(x)$ の次数を決定せねばなりません．実は最初の関係式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$$

から $f(x)$ の次数はある程度決定されるのだが，わかるでしょうか．$f(x)-2x^3=g(x)$ とおいてみよう．すると，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=1\ (\text{収束})$$

よって $g(x)$ が 3 次式以上だと，$\dfrac{g(x)}{x^2}$ は x には 1 次式以上の項が含まれることになり，$x\to\infty$ のとき，$\dfrac{g(x)}{x^2}$ が収束することはありえません．よって，$g(x)$ は 2 次式以下 (正確には 2 次式)．したがって，

$$g(x)=f(x)-2x^3=ax^2+bx+c$$

とおけるのです．

一般に，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\text{ の多項式}}{x\text{ の多項式}}$$

の極限は，

分母の次数 ＞ 分子の次数　$\Longrightarrow$　∞ に発散
分母の次数 ＝ 分子の次数　$\Longrightarrow$　収束
分母の次数 ＜ 分子の次数　$\Longrightarrow$　0 に収束

となります．

$\boxed{244}$ **時間の流れに沿って立式**しよう．つまり，まず $\mathrm{P}\left(\alpha,\ \dfrac{k^2}{\alpha}\right)$ とおいて，Q の座標を α と k で表すのです．

$\mathrm{P}\longrightarrow\mathrm{A}$ ということは，$\alpha\longrightarrow k$ ということ．