第１章　複素数平面

3　ド・モアブルの定理

ド・モアブルの定理とは次のようなものです．

▷Point◁（ド・モアブルの定理）

n を整数とするとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

が成立する．

意味を考えれば当たり前です．$\cos\theta + i\sin\theta$ が原点中心の θ 回転を表しているので，それを n 回施したら，$n\theta$ 回転になる，と言っているだけです．

$\boxed{23}$ ド・モアブルの定理に当てはめるだけ．

（1）

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4 = \cos\pi + i\sin\pi$$

（2）

$$\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^{-5} = \cos\left(\frac{-10}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{-10}{3}\pi\right)$$

（3）先頭についている 2 も 6 乗することを忘れないように．

$$\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)\right\}^6 = 2^6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

（4）一瞬，そのままやってしまいそうになりますが，まずは $\cos\theta + i\sin\theta$ の形に直さないと，ド・モアブルの定理は使えません．

$$\begin{aligned}&\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3\\ =&\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^3\\ =&\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

なお，sin，cos のままで終わってますが，それぞれ最後まで計算しておこう．

$\boxed{24}$ 普通は，2 倍角の公式，3 倍角の公式は加法定理を組み合わせて証明しますが，ド・モアブルの定理を利用しても証明できるのですね．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

それぞれ，左辺を展開し，両辺の実部と虚部を比較すればよいでしょう．

$\boxed{25}$ まさかそのまま計算する人はいないと思います．極形式で表してから，ド・モアブルの定理を用います．極形式に直す方法は $\boxed{12}$ などで学習済み．直してしまえば，$\boxed{23}$（3）と全く同じです．

（1）

$$\begin{aligned}1 + i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}(1+i)^{12} &= \left\{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right\}^{12}\\ &= 2^6\left(\cos\frac{12\pi}{4} + i\sin\frac{12\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{26}$ よくある問題です．

$z = \cos\dfrac{2}{5}\pi + i\sin\dfrac{2}{5}\pi$ のとき，ド・モアブルの定理より $z^5 = 1$ が成立します．

つまり，$z^5 = 1$ のとき，$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ の値を求めよ，というわけです．

ポイントは次の因数分解です．

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

$z^5 = 1$ かつ $z \neq 1$ なので・・・・

$\boxed{27}$ これも良くある典型的なパターン問題です．くれぐれも（1）などで

$$z^3 = -i \implies z = \sqrt[3]{-i}$$

などど機械的に処理しないように（気持ちは分かりますけど）．

最初のポイントは

$$|z^n| = |z|^n$$

です．このことから $|z|$（つまり z の大きさ）が決定します．

（1）の場合，$z^3 = -i$ より，$|z^3| = |-i|$．

よって，$|z|^3 = 1$ となり，$|z| = 1$ となります（$|z| > 0$ だから）．

したがって，$z^3=-i$ を満たす z の大きさは 1 なので

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

とおけます．よって，$z^3=-i$ に代入して

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=-i$$

ド・モアブルの定理より

$$\cos 3\theta+i\sin 3\theta=0+(-1)i$$

実部と虚部を比較して

$$\cos 3\theta=0,\quad \sin 3\theta=-1$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $0\leqq 3\theta<6\pi$ なので，求める θ は 3 個出てきます．
(4) の場合，$z^4=32(-1+\sqrt{3}i)$ より，$|z^4|=|32(-1+\sqrt{3}i)|$.
よって，$|z|^4=64$ となり，$|z|=2\sqrt{2}$ となります ($|z|>0$ だから).
したがって，$z^4=32(-1+\sqrt{3}i)$ を満たす z の大きさは $2\sqrt{2}$ なので

$$z=2\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

とおけます．よって，$z^4=32(-1+\sqrt{3}i)$ に代入して

$$\{2\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)\}^4=32(-1+\sqrt{3}i)$$

ド・モアブルの定理より

$$64(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=32(-1+\sqrt{3}i)$$

実部と虚部を比較して

$$\cos 4\theta=-\frac{1}{2},\quad \sin 4\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $0\leqq 4\theta<8\pi$ なので，求める θ は 4 個出てきます．

28 まさかそのまま計算はしないでしょう．極形式になおしてから計算します．
(1) は

$$\begin{aligned}1-i&=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

なので，

$$\frac{1}{(1-i)^9}=(1-i)^{-9}=\sqrt{2}^{-9}\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)$$

(2) は

$$\begin{aligned}\sqrt{3}-i&=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\\&=2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}+i&=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3&=\left(\frac{2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}\right)^3\\&=\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)^3\\&=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\end{aligned}$$

となります．
(3) は (2) と同じ．
(4) は，$5-i$ や $2-3i$ はうまく極形式に表せませんが，

$$\frac{5-i}{2-3i}=\frac{(5-i)(2-3i)}{(2-3i)(2+3i)}=1+i$$

なので極形式で表すことができますね．

29 上の例題 3 を参照のこと．そのまんま．

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n&=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n\\&=\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n&=\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n\\&=\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\end{aligned}$$

なので，

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n=2i\sin\frac{n\pi}{4}$$

です．あとは n に 1 から順番に自然数を代入してみよう．値が周期的に変化するはずです．単位円をイメージすると考えやすいでしょう．

$\boxed{30}$ ちょっと意地悪な問題．$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$ は極形式でうまく表現できませんが，$\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i\right)^2=\sqrt{3}+i$ なので，これは極形式で表現できますね．つまり，

$$\begin{aligned}\sqrt{3}+i&=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

したがって，$a_n=2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6}+i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$ n に 1 から順番に自然数を代入していき，初めて実数になる (虚部がなくなる) 場合を探せばよいのです．まあ，そんなことしなくても図形的に考えれば $n=6$ のときであるのは明白ですがね．

$\boxed{31}$ 有名問題です．教科書などに必ず載っているのでそちらを参照してください．

$\boxed{32}$ (1) は特に z が複素数であることなど意識せずに機械的に解けばよいでしょう．つまり，$z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ より $z^2-(2\cos\theta)z+1=0$ と変形できるので，フツーの 2 次方程式のノリで解きます．すると $z=\cos\theta\pm i\sin\theta$ となります．

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき，

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

$z=\cos\theta-i\sin\theta$ のとき，

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos\theta-i\sin\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

になるので，いずれの場合にも $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ になりますね．

なお (2) は数学的帰納法でも解けるので意欲的な人はぜひとも挑戦しよう．ちょっと変な帰納法になると思いますが．

$\boxed{33}$ 6 次方程式ですが，$z^3=t$ とでもおくと t の 2 次方程式になって t を求めることができます．つまり，$t^2+t+1=0$ より $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ なので

$$z^3=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

あとは $\boxed{27}$ の要領でやればよいでしょう．