第2章　極限

5　三角関数と極限

この章の内容はとても重要です．今後も頻繁に登場することなので，しっかり理解しておこう．まずは，次のポイントから．

▷Point◁

次の2つの極限値に尽きる．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

三角関数の極限の問題は，いかにしてこれらの形にもっていくか，がポイント．そのためには三角関数の各公式を確実に頭に入れておくことが必要条件である．
なお，極限値の計算にあたっては，かなりの工夫が必要である．変形方法も1通りではない．**三角関数の公式を縦横無尽に駆使していろいろな解答を考えることは，大切な勉強方法である．**

$\boxed{245}$ あまり複雑に考えずに，感覚的にサラッと処理しましょう．

(1) は，分母 $\tan x$ に注目します．極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ はどうなるのか．$y=\tan x$ のグラフをイメージすると，

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\tan x=-\infty$,

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=+\infty$

なので，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ は存在しません．

しかし，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}$ は，分母が $-\infty$ になろうと，$+\infty$ になろうと，どちらも0に収束するので，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}=0$ となります．

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ は存在しないのに，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}$ は存在する，というちょっと変な状況になっています．

(2) も，分母 $\sin x$ に注目します．極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin x=0$ です．しかし，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}$ は存在しません．なぜなら，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフをイメージすれば分かるように，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ は存在しないからです．

今回は (1) とは逆で，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin x$ は存在するのに，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}$ は存在しない，というちょっと変な状況になっています．

(3) は，まず $\dfrac{2}{x}$ に注目します．すると，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$ であることがわかります．次に $y=\cos x$ のグラフをイメージすればよいのです．

なお，最初に $\dfrac{2}{x}=t$ と置き換えて考えても良いでしょう．

$\boxed{246}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

の公式で x は何でもかまいません．つまり，

$$\lim_{\triangle\to 0}\frac{\sin\triangle}{\triangle}=1$$

いかにしてこの形を式の中に作り出すのか，がポイント．**とにかく半ば強引に無理やり作っていくこと．**途中までやってみます．

(1) は，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\times 4$,

(2) は，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{5x}{\sin 5x}\times\frac{2}{5}$,

(3) は，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\frac{x}{\sin x}3\cos x$

と変形します．なお，(3) は3倍角の公式を利用してもできます．この変形も重要なので確認しておこう．

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cos x}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(3\sin x-4\sin^3 x)\cos x}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}(3-4\sin^2 x)\cos x\end{aligned}$$

このように三角関数の極限を求める方法は何通りかあるので，他の方法をイロイロ考えてみるとチカラがつくでしょう．

$\boxed{247}$ 前問同様に

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を利用しますが，変形に少し工夫が必要です．「こんな変形，思いつくわけない」と言うかもしれませんが，思いついてほしいところ．また他にも様々な変形方法が考えられます．**複数の方法を学習することはとても大切なことです**．以下には標準的な (と思われる) 変形を 1 つ紹介しますが，ぜひ各自で別解をみつけてほしいです．少なくとも全く違う方法で 1 つは別解を見つけること．絶対に！

(1) は，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x-\sin x}{x}\\ =&\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{x\cos 2x}-\frac{\sin x}{x}\right)\\ =&\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\frac{2}{\cos 2x}-\frac{\sin x}{x}\right)\end{aligned}$$

(2) は，2 倍角の公式を利用します．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{x}\end{aligned}$$

(3) は，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 2x}\\ =&\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{\sin 2x}+\frac{\sin x}{\sin 2x}\right)\\ =&\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\frac{2x}{\sin 2x}\frac{3}{2}+\frac{\sin x}{x}\frac{2x}{\sin 2x}\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

もし，三角関数の和積公式を知っているなら次のような変形も可能です．

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 2x}\\ =&\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x\cos x}{\sin 2x}\end{aligned}$$

これなら一発で終わりますね．
最初にも言ったように，いずれも，いかにして

$$\lim_{\triangle\to0}\frac{\sin\triangle}{\triangle}=1$$

の形を作り出すのかがポイントとなります．全ての変形，計算はこの形を作るためなのです．

$\boxed{248}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を利用するに当たっては，$x\to0$ **であることが大前提**です．$x\to0$ でない場合は，x を別の文字 t に置換して $t\to0$ になるように変数変換すること．(1) がまさにこのパターンで，$x\to\frac{\pi}{2}$ なので，$x-\frac{\pi}{2}=t$ と置換して $t\to0$ に変換します．よって (1) は，$x=t+\frac{\pi}{2}$ を代入して，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 2x}&=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin 2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\\ &=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(2t+\pi)}\\ &=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{-\sin 2t}\end{aligned}$$

(2) と (3) は，$x\to0$ なので変数変換する必要はありません．従来通り，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を利用するならば，$\boxed{247}$(2) と同様に，半角の公式

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$$

を用いればよいでしょう．しかし，この場合，(2) の分母，(3) の分子をそれぞれ角を $\frac{x}{2}$ に直す必要があって，結構メンドウです (でも勉強になる方法なので必ず自分でやっておこう)．
今回は次のような変形をするのが良いでしょう．よく登場する有名な変形です．
(2) は，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\\ =&\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}\\ =&\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\\ =&\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1+\cos x}\end{aligned}$$

(3) は，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$

なんだかパズルみたいですね．

このように，三角関数の極限を求める方法はいろいろあるので，「答えが出たら終わり」ではなく必ず別解を考えてください．この練習が大きな力となるのです．

249 極限の公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を利用するに当たっては，次のことが前提となります．

① $x\to 0$ であること． $x\to 0$ でない場合は，x を別の文字 t に置換して $t\to 0$ になるように変数変換すること．

② 角 x は rad（ラジアン）単位であること． もし x が度数単位の場合は，$x^\circ=\dfrac{\pi x}{180}$ rad の関係を利用して変換すること．

(1) は，$x^\circ=\dfrac{\pi x}{180}$ rad の関係を利用して rad に変換します．つまり，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^\circ}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{\pi x}{180}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{x\cos\frac{\pi x}{180}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}}\,\frac{\frac{\pi}{180}}{\cos\frac{\pi x}{180}}$$

(2) は，$x\to\pi$ なので，$x-\pi=t$ と置換して $t\to 0$ に変換します．

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

(3) は，$x\to\dfrac{\pi}{2}$ なので，$x-\dfrac{\pi}{2}=t$ と置換して $t\to 0$ に変換します．

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{t\to 0}t\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

この問題は，この次の変形が難しい．このままだとできません．なぜなら，

$$\lim_{t\to 0}t=0$$

$$\lim_{t\to 0}\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\text{極値なし}$$

だからです．さてどうしましょうか．

(4) は，$x\to 1$ なので，$x-1=t$ と置換して $t\to 0$ に変換します．

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+1)\pi}{t}$$

この問題もこの次の変形がムツカシイですね **248** (1) がヒントになるかもしれません．

(5) は，$\sin x=t$ と置換することがポイント．$x\to 0$ のとき $t\to 0$ なので，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

(6) は，$\dfrac{1}{2x}=t$ と置換すると，$x\to\infty$ のとき $t\to 0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t}$$

250 (1) は **247** (1) や **248** (2)(3) と同様です．つまり，2 倍角の公式

$$1-\cos 3x=2\sin^2\frac{3x}{2}$$

を利用するか，または分母分子に $1+\cos 3x$ をかけて

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}$$

とするかのどちらかですね．

(2) は問題を良く見よう．$\sin^2 x$ と $\sin x^2$ は全く違います．

これも (1) と同様に，2 倍角の公式を利用するか，分母分子に $1+\cos x$ をかけるかのど

ちらかでしょう．$1+\cos x$ をかけるほうで少しやってみると，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}(1+\cos x)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2(1+\cos x)\end{aligned}$$

$\boxed{251}$ (1) は x^2 と $\cos\dfrac{1}{x}$ をかけたものです．$x\to 0$ のとき $\dfrac{1}{x}\to\infty$ または $\dfrac{1}{x}\to -\infty$ なので，$\cos\dfrac{1}{x}$ は振動することになります．このままでは極値の計算ができません．こんなときどうするのか．

(2) も $x\to\infty$ のとき $\sin x$ は振動します．このままでは極値の計算ができません．こんなときどうするのか．

$\boxed{181}$ を参照しよう．(1)(2) 共にハサミウチの原理を利用します．

(1) は

$$-1\leqq\cos\frac{1}{x}\leqq 1$$

(2) は

$$0\leqq 1+\sin x\leqq 2$$

をうまく利用しよう．

$\boxed{252}$ まずは問題文をよく読んで正確な図を描くこと．ポイントは座標で考えるということです．つまり，原点中心，半径 a の円を考えます．点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ とし，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ とおきます．あとは図形の性質を利用して，辺 AP，弧 AP，辺 PQ をそれぞれ a と θ を用いて表します．点 P が点 A に限りなく近づくとは θ がどのようになることでしょうか．

$\boxed{239}$ も参照しといてください．

$\boxed{253}$ $\boxed{240}$ や $\boxed{241}$ を参照しよう．$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$ であることが必要です．つまり $b=-\dfrac{\pi}{2}a$．これをもとの式に代入し，$x-\dfrac{\pi}{2}=t$ と置換して $t\to 0$ に変換するのです．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax-\frac{\pi}{2}a}{\cos x}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{a\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}a}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{at}{-\sin t}\end{aligned}$$

この極限値が $\dfrac{1}{2}$ になるためには，a はどのような値でなければならないのでしょうか．