第 2 章　極限

6　関数の連続性

そもそも関数の連続性について，厳密な議論をするには大学レベルの数学が必要なので，高校生の段階で扱うには無理があります．したがって，どうしても感覚的な話になってしまいますが仕方ありません．

入試でも，そんなに突っ込んだ問題は出題されないので，あんまり深刻にならずに気楽に流してください．

▷Point◁ (☆関数の連続性☆)

関数 $y = f(x)$ が**定義域内の点** $x = a$ **で連続である**とは，$\lim_{x \to a} f(x)$ と $f(a)$ がともに存在し，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成立することである．

▷Point◁ (☆中間値の定理☆)

中間値の定理とは

『関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ の全ての点で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して $f(c) = k\ (a < c < b)$ を満たす c が少なくとも一つ存在する』

というもの．しかし，中間値の定理は次の特別な場合で用いられることが圧倒的に多い．

『関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ の全ての点で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば，方程式 $f(x) = 0$ は $a < x < b$ の範囲に少なくとも一つの実数解をもつ』

厳密な証明は高校の範囲を超えるので省略．グラフを描いて感覚的に理解してください．

254 $\lim_{x \to 0} f(x)$ と $f(0)$ が存在して，両者が一致するかどうか調べます．

(1) の場合，$\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$，$f(0) = 0$ だから，$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ が成立している．よって連続．

(2) と (3) はワンセットで考えてほしいところ．まずはガウス記号の関数だから明らかに整数値で不連続なので，いきなり $\lim_{x \to 0} f(x)$ を考えることはできません．

当然，

$$\lim_{x \to +0} f(x)$$

と $\lim_{x \to -0} f(x)$ と分けて考え，この両者が一致して初めて，$\lim_{x \to 0} f(x)$ が存在するのです．

(2) は，$y = -x$ のグラフをイメージしよう．すると，

$$\lim_{x \to +0} (-x) = -0,\quad \lim_{x \to -0} (-x) = +0$$

であることがわかります．よって，

$$\lim_{x \to +0} [-x] = -1,\quad \lim_{x \to -0} [-x] = 0$$

となるので，$\lim_{x \to +0} [-x] \neq \lim_{x \to -0} [-x]$．よって，$\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しません．$\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しないのだから，連続どころの話ではありません．

(3) は，$y = -|x|$ のグラフをイメージしよう．すると，

$$\lim_{x \to +0} (-|x|) = -0,\quad \lim_{x \to -0} (-|x|) = -0$$

であることがわかります．よって，

$$\lim_{x \to +0} [-|x|] = -1,\quad \lim_{x \to -0} [-|x|] = -1$$

$\lim_{x \to +0} [-|x|] = \lim_{x \to -0} [-|x|] = -1$ と一致するので，$\lim_{x \to 0} f(x) = -1$ と存在します．

一方，$f(0) = [-0] = 0$ なので，$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$．よって不連続．

255 いずれもグラフを描けば簡単にわかるでしょう．で，グラフはかけるでしょうね？

256 中間値の定理を利用する基本的な問題．いずれも区間の両端での関数値が異符号であることを確認するだけ．「少なくとも 1 個」という点に注意しよう．グラフが単調増加または単調減少ならば「1 個だけ」ですが，今のところ何個もつかはわかりません．

257 ある点での連続性については $\boxed{254}$ でやりました．今回は定義域内の全ての数での連続性ですが，ハッキリいって厳密に証明することは無理です．使ってよい考え方は

連続関数の組合せは連続関数である

ということです．

(1) 分数関数の場合，分母 $\neq 0$ となるところが定義域です．つまり，この場合 $x^2 \neq 1$，つまり $x \neq \pm 1$．$x \neq \pm 1$ のとき，$y = x+1$ も $y = x^2 - 1$ も連続関数なので，$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ も連続なのは明白．

(2) はとくに定義域に制限は見つからないので全ての実数が定義域になります．ということは，ガウス記号の関数は整数点で不連続だから，明らかに $f(x) = x - [x]$ は整数点で不連続になります．念のため，厳密に証明しておくと，

$$\lim_{x \to n+0}(x - [x]) = n - n = 0$$

$$\lim_{x \to n-0}(x - [x]) = n - (n-1) = 1$$

となり，$f(x) = x - [x]$ は $x = n$ で連続ではない．

$\boxed{258}$ なかなか難しいですが，重要な問題なので詳しく解説します．

まず，**基本的に分母 $\neq 0$ となるところが定義域**です．したがって，分母 $= 0$ となるところで関数は定義されません．

(1) は $\boxed{257}$(1) と全く同様．よって $x = 3$ では定義されません．

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} \quad (x \neq 3)$$

しかし，

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+1) = 4$$

だから，$f(3) = 3 + 1 = 4$ と定義すれば，$x = 3$ で連続になります．よって，

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & (x \neq 3) \\ 4 & (x = 3) \end{cases}$$

は全ての実数 x で連続関数です．

(2) も同様．よって $x = 0$ では定義されません．しかし，

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to +0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} \frac{x^3}{-x} = \lim_{x \to -0}(-x^2) = 0$$

だから，$f(0) = 0$ と定義すれば，$x = 0$ で連続になります．よって，

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は全ての実数 x で連続関数です．

(3) は $\boxed{257}$(2) と全く同様．全ての実数 x で定義されていますが，**ガウス記号は整数値で不連続なので $|\cos x|$ が整数になるところで不連続**．すなわち，$x = n\pi$ で不連続です．

$y = |\cos x|$ のグラフを考えると，このグラフは $y = \cos x$ のグラフを x 軸よりも上に折り返したものだから，

$$\lim_{x \to n\pi+0} |\cos x| = 1-0, \quad \lim_{x \to n\pi-0} |\cos x| = 1-0$$

したがって，

$$\lim_{x \to n\pi+0} f(x) = \lim_{x \to n\pi+0} [|\cos x|] = 0$$

$$\lim_{x \to n\pi-0} f(x) = \lim_{x \to n\pi-0} [|\cos x|] = 0$$

だから，$f(n\pi) = 0$ と定義すれば，$x = n\pi$ で連続になります．よって，

$$g(x) = \begin{cases} [|\cos x|] & (x \neq n\pi) \\ 0 & (x = n\pi) \end{cases}$$

は全ての実数 x で連続関数です．

$\boxed{259}$ 初項 x，公比 $r = \dfrac{1}{1+|x|}$ の無限等比級数．

この級数が収束する条件は，$x = 0$ または $-1 < \dfrac{1}{1+|x|} < 1$ でした．

$x = 0$ のとき，

無限級数は 0 に収束．つまり $f(0) = 0$

$x \neq 0$ のとき，

$-1 < \dfrac{1}{1+|x|} < 1$ ならば無限級数は収束しますが，この不等式は常に成立するので，$x \neq 0$ のとき必ず収束することがわかります．このとき，無限級数は $\dfrac{x}{1 - \left(\dfrac{1}{1+|x|}\right)}$ に収束．つまり，$f(x) = \dfrac{x(1+|x|)}{1+|x|-1} = \dfrac{x(1+|x|)}{|x|}$.

したがって，$x > 0$ のとき，

$$f(x) = \frac{x(1+x)}{x} = x + 1$$

$x < 0$ のとき，

$$f(x) = \frac{x(1-x)}{-x} = x - 1$$

よって，

$$\lim_{x\to+0} f(x) = 1,\quad \lim_{x\to-0} f(x) = -1,\quad f(0) = 0$$

なので，$x = 0$ で不連続.

260 難しそうですが，ようするに極限値の計算をせよということです.
つまり，(1) の場合，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} \text{を計算せよ}$$

と考えればよく，必然的に $x^{2n} = (x^2)^n$ とみて，$0 \leqq x^2 < 1$，$x^2 = 1$，$1 < x^2$ の場合に分けて考えます.
(2) も同様. $0 \leqq |x| < 1$, $|x| = 1$, $1 < |x|$ の場合に分けて考えます.
(3) は質問がとても多い問題. 例えば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+1}$$

なら，分母分子を n で割って計算します. 今回の場合は，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin 2x + 1}{n\sin x + 1}$$

です. もしも，$\sin x$ や $\sin 2x$ を定数とみなせば全く同じなんですが，定数ではありません。例えば，$x = pi$ の場合，$\sin x = 0$ なので，分母部分から n がなくなってしまうので (分子の n もなくなる！)，分母分子を n で割るどころの話ではありません. つまり，$\sin x = 0$ となるような x は別途考慮する必要があるのです. もちろん $\sin x \fallingdotseq 0$ となるときは，最初の例のように分母分子を n で割ります.

なお細かいことを言えば，「グラフをかき，その連続性を調べよ」という問題文はちょっとおかしい. なぜなら，連続性を調べることによってグラフがかけるわけで，本来ならば「連続性を調べ，そのグラフをかけ」とするべきです.

261 「$f(x) = x$ が $0 < x < 3$ の範囲に少なくとも 3 個の実数解をもつ」
$\iff$ 「$f(x) - x = 0$ が $0 < x < 3$ の範囲に少なくとも 3 個の実数解をもつ」
と解釈します (この解釈はとても重要な考え方です).
そこで，$g(x) = f(x) - x$ とおいて，$g(x)$ に中間値の定理を適用.
$g(0) = f(0) - 0 = -1 - 0 = -1 < 0$
$g(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$
$g(2) = f(2) - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$
$g(3) = f(3) - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$
であるので，$g(x)$ のグラフの様子がわかるでしょう.

262 3 次方程式だから解の個数は 3 個が最大. 3 次関数のグラフをイメージして異符号になっている箇所 (区間) を探すだけ. ほとんどカンですね.