第5章　微分法

1　微分係数と導関数

2　導関数の計算

基本的に『微分のココロ』に全て書いてあるので，詳しくはそっちを参照してください

$\boxed{263}$ 「微分可能である」とは「接線が引ける」ということです．もっとカンタンに言えば「なめらかである」ということ．よって，今回の場合，グラフを書けば明らかに $x=1$ で尖がっているので微分不可能なんですが，さすがに解答に「尖がっているから」とは書けないので，計算できちんと示す必要があります．

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能 $\iff$ $f'(a)$ が確定する

よって，この問題の場合は $f'(1)$ の値が確定するかどうかを確認します．
言うまでもなく，「$f'(1)$ の値が確定する」とは，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ と $\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ とが一致することなので，それぞれの値を計算して比較すればよいのです．

$\boxed{264}$ 定義に従って微分するとは，導関数の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

に従って極限値の計算をすることです．
つまり，(1) の場合

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{x+h-2}-\frac{1}{x-2}}{h}$$

(2) の場合

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$$

(3) の場合

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{x}}{h}$$

を，それぞれ計算することになります．

$\boxed{265}$ 「定義に従って」の指示がなければ，微分の公式に従って，機械的に微分するだけ．

$\boxed{266}$ 展開して微分しても構いませんが，せっかくなので積の微分法の公式

$$(fg)'=f'g+fg'$$

を使おう．

$\boxed{267}$ 商の微分法の公式

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

を使うだけ．特に $f=1$ の場合

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$$

はよく使うので別に暗記しておいたほうがよいです．

$\boxed{268}$

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\ \ (\alpha\text{ は実数})$$

を利用します．なお (3) は商の微分の公式を用いてもよいですが，

$$y=\frac{x^2-x-2}{x^3}=\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}=x^{-1}-x^{-2}-2x^{-3}$$

と考えることもできますね．

$\boxed{269}$ 重要かつ基本．合成関数の微分です．「まずは式全体を大きく見て大雑把にザックリ微分．その後で中身の微分をくっつける」が基本．必ずできるようになること．

$\boxed{270}$ 逆関数の導関数の公式を用いて，となっていますが，あんまりそんなこと気にせずに機械的にやります．
(1) をやってみます．
まず，$y^5=x$ として両辺を x で微分します．

$$5y^4\frac{dy}{dx}=1$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5y^4}$$

最後に $y=x^{\frac{1}{5}}$ を代入して

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}$$

となります．

$\boxed{271}$ (1)(2)(3) は，x^α の形に変形できるので，公式

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ (\alpha \text{ は実数})$$

で終わり．
(4)(5)(6) は，$f(x)^\alpha$ の形に変形できるので，公式

$$(f(x)^\alpha)' = \alpha f(x)^{\alpha-1} f'(x) \ (\alpha \text{ は実数})$$

で終わり．
なお，上の $\boxed{270}$ のようにする方法もあります．つまり，
(1) は，$y^5 = x^3$
(2) は，$y^2 = x^{-5}$
(3) は，$y^4 = x^{-7}$
(4) は，$y^2 = x^2 + 2x + 3$
(5) は，$y^3 = x^2 + 2$
(6) は，$y^2 = (x^2 + 3)^{-1}$
と考え，両辺を x で微分します．この方法は，指数計算にわずらわしさがないので僕は好きですね．

$\boxed{272}$ 3 つの積の微分公式

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

に従うだけ．

$\boxed{273}$ 積の微分，商の微分，合成関数の微分，のミックス型．いろいろな方法がありますね．答えが合えばそれで良いです．好きにやってください．この問題ができれば，「微分の初歩」が完成です．

$\boxed{274}$ $\boxed{270}$ を振り返ってみよう．あのときは $\dfrac{dy}{dx}$ が y の式になったので，x の式に戻すために，元の式をそのまま代入しました．
今回の場合，(1) で $x = y^2 - 2y$ の両辺を x で微分すると

$$1 = (2y-2)\frac{dy}{dx}$$

よって，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-2}$$

となります．やっぱり $\dfrac{dy}{dx}$ が y の式になったので，x の式に戻さねばなりませんが，今度は元の式をそのまま代入することはできないので

$$x = y^2 - 2y \iff y^2 - 2y - x = 0$$

と考えて，y の 2 次方程式を解きます．つまり

$$y = 1 \pm \sqrt{1+x}$$

として $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y-2}$ に代入します．
あまり深く考えずに機械的にやることがコツです．

$\boxed{275}$ あんまり重要じゃないのに，非常に質問の多い問題です．機械的にやるだけです．
まず，$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ とは，$x = \dfrac{1}{y^3+1}$ を $y = \cdots$ の形に書き直したものです．
つまり，$x = \dfrac{1}{y^3+1}$ において $x = \dfrac{1}{9}$ における $\dfrac{dy}{dx}$ の値を計算するわけです．
ちなみに $x = \dfrac{1}{9}$ のとき $y = 2$ なので，$\dfrac{dy}{dx}$ が x の式になれば $x = \dfrac{1}{9}$ を，y の式になれば $y = 2$ を代入するだけです．
なお，$x = \dfrac{1}{y^3+1}$ において $\dfrac{dy}{dx}$ を求めることは，前問の $\boxed{274}$ でもやっています．つまりこの問題は本質的に $\boxed{274}$ と全く同じなのです．

$\boxed{276}$ とてもとても質問の多い問題．まあまあ重要な問題ですが入試にはあんまり出ないんですけどね．
微分係数の定義

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(x)}{h}$$

において，別に h でなくても

$$f'(c) = \lim_{\bigcirc\to 0} \frac{f(c+\bigcirc) - f(x)}{\bigcirc}$$

のように $\bigcirc$ 部分がそろっていれば良いのです．

いずれにしても，定義が使える形にゴーインにもっていくことがポイント．(1)(2)(4) だけやってみます．

(1)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(c+3h)-f(c)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(c+3h)-f(c)}{3h}\times 3\\
=&3f'(c)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(c+4h)-f(c-2h)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(c+4h)-f(c)+f(c)-f(c-2h)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(c+4h)-f(c)}{h}-\frac{f(c-2h)-f(c)}{h}\right)\\
=&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(c+4h)-f(c)}{4h}\cdot 4 -\frac{f(c-2h)-f(c)}{-2h}\cdot(-2)\right)\\
=&4f'(c)-(-2)f'(c)\\
=&6f'(c)
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to c}\frac{c^2f(x)-x^2f(c)}{x-c}\\
=&\lim_{x\to c}\frac{c^2(f(x)-f(c))+c^2f(c)-x^2f(c)}{x-c}\\
=&\lim_{x\to c}\frac{c^2(f(x)-f(c))+f(c)(c^2-x^2)}{x-c}\\
=&\lim_{x\to c}\left(\frac{c^2(f(x)-f(c))}{x-c}-\frac{f(c)(x^2-c^2)}{x-c}\right)\\
=&\lim_{x\to c}\left(c^2\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f(c)(x+c)\right)\\
=&c^2f'(c)-2cf(c)
\end{aligned}
$$

$\boxed{277}$ $x=1$ の前後で 2 つのグラフがくっついてるのですが，なめらかにくっついているかどうか確かめなさい，ということ．図を描けばなめらかにくっついていそうですが，きちんと計算で示しましょう．詳しくは犬プリで解説します．

$\boxed{278}$ あんまり入試に出ませんから，できなくても気にしないでください．数学 Ⅲ を 嫌いにならないでください．
詳しくは犬プリで解説します．