4STEP $\boxed{279}$ を極める（三角関数編）

それでは，2 年生で学習したことの復習として 4STEP $\boxed{279}$ に取り組もう．ポイントとなるのは合成関数の微分を自由自在に操れるかどうか，です．合成関数の微分をもう一度確認しておこう．

▷Point◁（合成関数の微分）

$y=f(u)$，$u=g(x)$ がそれぞれ u，x の微分可能な関数であるとき，
合成関数 $y=f(g(x))$ も微分可能で，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

という関係式が成立する．

実際は，この公式を使うことはマレで，次のようにザックリと考えることがほとんどです．

▷Point◁

合成関数の微分の基本姿勢
まずは式全体を大きく見て大ざっぱにザックリ微分．その後で中身の微分をくっつける．

【例】 $y=(2x+3)^4$ の微分は？

解 $\dfrac{dy}{dx}=4(2x+3)^3\cdot(2x+3)'$
$\quad=8(2x+3)^3$

三角関数のザックリ微分の代表格は次の公式です．これらは頻出かつ重要です．

▷Point◁（ザックリ微分の公式）

$$(\sin f(x))'=\cos f(x)\cdot f'(x)$$
$$(\cos f(x))'=-\sin f(x)\cdot f'(x)$$
$$(\tan f(x))'=\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$$

考え方 合成関数の微分法を用います．sin の場合のみ証明しときます．

$y=\sin f(x)$ において，$f(x)=u$ とおくと，$y=\sin u$ であり，$\dfrac{dy}{du}=\cos u$，$\dfrac{du}{dx}=f'(x)$ なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot f'(x)=\cos f(x)\cdot f'(x)$$

次の 2 つの【例】は基本的かつ重要です．

【例】 $y=\sin 2x$ の微分は？

解 $\dfrac{dy}{dx}=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x.$

【例】 $y=\sin^2 x$ の微分は？

解 $\dfrac{dy}{dx}=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x.$

$\boxed{279}$ 次の関数を微分せよ．

(1) $y=2x-\cos x$ (2) $y=\sin x-\tan x$ (3) $y=\cos(2x-1)$
(4) $y=\tan 3x$ (5) $y=\cos(\sin x)$ (6) $y=\sin x^2$
(7) $y=\tan x^2$ (8) $y=\cos^3 x$ (9) $y=\tan^3 x$
(10) $y=\dfrac{1}{\cos x}$ (11) $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (12) $y=x\sin 2x$
(13) $y=\sin x\cos x$ (14) $y=\sin 3x\cos 5x$

考え方 合成関数の微分法は，置き換えして丁寧にやる「慎重派」と大ざっぱにやる「ザックリ派」という 2 つの流派に分かれます．個人的には「ザックリ派」でやってほしいですが，せっかくなので (3)〜(11) を 2 つの流派どちらもやってみます．なお，(1)(2) は公式で一発終了．(12)〜(14) は積の微分公式です．

解

(1) $\dfrac{dy}{dx}=2+\sin x.$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

(3)

慎重派の解答

$2x-1=u$ とおくと，$y=\cos u$ であり，$\dfrac{dy}{du}=-\sin u$，$\dfrac{du}{dx}=2$ なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\sin u\cdot 2=-2\sin(2x-1).$$

ザックリ派の解答

$$\frac{dy}{dx}=-\sin(2x-1)\cdot(2x-1)'=-2\sin(2x-1)$$

(4)

慎重派の解答

$3x=u$ とおくと，$y=\tan u$ であり，

$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{\cos^2 u}$，$\dfrac{du}{dx}=3$ なので，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot 3=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$.

ザックリ派の解答

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)'=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$.

(5)

慎重派の解答

$\sin x=u$ とおくと，$y=\cos u$ であり，

$\dfrac{dy}{du}=-\sin u$，$\dfrac{du}{dx}=\cos x$ なので，

$$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=-\sin u\cdot\cos x$$
$$=-\sin(\sin x)\cos x.$$

ザックリ派の解答

$$\dfrac{dy}{dx}=-\sin(\sin x)\cdot(\sin x)'$$
$$=-\sin(\sin x)\cos x.$$

(6)

慎重派の解答

$x^2=u$ とおくと，$y=\sin u$ であり，

$\dfrac{dy}{du}=\cos u$，$\dfrac{du}{dx}=2x$ なので，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2$.

ザックリ派の解答

$\dfrac{dy}{dx}=\cos x^2\cdot(x^2)'=2x\cos x^2$.

(7)

慎重派の解答

$x^2=u$ とおくと，$y=\tan u$ であり，

$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{\cos^2 u}$，$\dfrac{du}{dx}=2x$ なので，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot 2x=\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$.

ザックリ派の解答

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 x^2}\cdot(x^2)'=\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$.

(8)

慎重派の解答

$\cos x=u$ とおくと，$y=u^3$ であり，

$\dfrac{dy}{du}=3u^2$，$\dfrac{du}{dx}=-\sin x$ なので，

$$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$$
$$=3u^2\cdot(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x.$$

ザックリ派の解答

$\dfrac{dy}{dx}=3\cos^2 x\cdot(\cos x)'=-3\cos^2 x\sin x$.

(9)

慎重派の解答

$\tan x=u$ とおくと，$y=u^3$ であり，

$\dfrac{dy}{du}=3u^2$，$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=3u^2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x)}=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$.

ザックリ派の解答

$\dfrac{dy}{dx}=3\tan^2 x\cdot(\tan x)'=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$.

(10)

慎重派の解答

$\cos x=u$ とおくと，$y=u^{-1}$ であり，

$\dfrac{dy}{du}=-u^{-2}$，$\dfrac{du}{dx}=-\sin x$ なので，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=-u^{-2}\cdot(-\sin x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

ザックリ派の解答

$\dfrac{dy}{dx}=-(\cos x)^{-2}\cdot(\cos x)'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

(11)

慎重派の解答

$\sin x=u$ とおくと，$y=u^{-2}$ であり，

$\dfrac{dy}{du}=-2u^{-3}$，$\dfrac{du}{dx}=\cos x$ なので，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=-2u^{-3}\cdot\cos x=\dfrac{-2\cos x}{\sin^3 x}$.

ザックリ派の解答

$\dfrac{dy}{dx}=-2(\sin x)^{-3}\cdot(\sin x)'=\dfrac{-2\cos x}{\sin^3 x}$.

(12) $\dfrac{dy}{dx}=x'\sin 2x+x(\sin 2x)'=\sin 2x+x(2\cos 2x)=\sin 2x+2x\cos 2x$.

(13) $\dfrac{dy}{dx}=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$.

(14) $\dfrac{dy}{dx}=(\sin 3x)'\cos 5x+\sin 3x(\cos 5x)'=3\cos 3x\cos 5x+\sin 3x(-5\sin 5x)$
$=3\cos 3x\cos 5x-5\sin 3x\sin 5x$.

注 何度も何度も練習して，全問完璧にマスターしておくこと．できれば『ザックリ派』でいこう．