4STEP $\boxed{280}$ を極める (指数対数関数編)

それでは，2 年生で学習したことの復習として 4STEP $\boxed{280}$ に取り組もう．ポイントとなるのは合成関数の微分を自由自在に操れるかどうか，です．合成関数の微分をもう一度確認しておこう．

▷Point◁(合成関数の微分)

$y=f(u)$，$u=g(x)$ がそれぞれ u，x の微分可能な関数であるとき，
合成関数 $y=f(g(x))$ も微分可能で，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

という関係式が成立する．

実際は，この公式を使うことはマレで，次のようにザックリと考えることがほとんどです．

▷Point◁

合成関数の微分の基本姿勢
まずは式全体を大きく見て大ざっぱにザックリ微分．その後で中身の微分をくっつける．

ザックリ微分の代表格は次の公式です．この 2 つの微分は頻出かつ重要です．

▷Point◁(ザックリ微分の公式)

$$(\log|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$(e^{f(x)})'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

注 絶対値のないタイプも同様です．

$$(\log f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

考え方 合成関数の微分法を用います．

$y=\log|f(x)|$ において，$f(x)=u$ とおくと，$y=\log|u|$ であり，$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u}$，$\dfrac{du}{dx}=f'(x)$ なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$y=e^{f(x)}$ において，$f(x)=u$ とおくと，$y=e^u$ であり，$\dfrac{dy}{du}=e^u$，$\dfrac{du}{dx}=f'(x)$ なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot f'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

参考 $(e^{f(x)})'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$ は対数微分法を用いても証明できます．

$y=e^{f(x)}$ において，両辺の自然対数をとると，$\log y=f(x)$．

両辺を x で微分して，$\dfrac{y'}{y}=f'(x)$．

したがって，$y'=y\cdot f'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$．

$\boxed{280}$ 次の関数を微分せよ．ただし，a は定数で，$a>0$，$a\neq1$ とする．

(1) $y=\log(x^2+2)$ (2) $y=\log\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right|$ (3) $y=\log|x^2-4|$

(4) $y=\log(\sin x)$ (5) $y=(\log x)^3$ (6) $y=(x\log x-x)^2$

(7) $y=e^{4x}$ (8) $y=(x+3)e^{-x}$ (9) $y=x^2e^x$

(10) $y=e^x\cos x$ (11) $y=e^x\tan x$ (12) $y=e^{x^2+2x}$

(13) $y=\log_4 2x$ (14) $y=\log_a(x^2-1)$ (15) $y=a^{-3x}$

考え方 合成関数の微分法は，置き換えして丁寧にやる「慎重派」と大ざっぱにやる「ザックリ派」という 2 つの流派に分かれます．基本的に「ザックリ派」でやりますが，せっかくなので (1) と (5)，(14) のみ，2 つの流派どちらもやってみます．

(1) **解** (慎重派)

$x^2+2=u$ とおくと，$y=\log u$ であり，$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u}$，$\dfrac{du}{dx}=2x$ なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot2x=\frac{2x}{x^2+2}$$

解 (ザックリ派)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+2}\cdot(x^2+2)'=\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}=\frac{2x}{x^2+2}$$

(2) $y=\log\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right|=\log\dfrac{|2x-1|}{|2x+1|}$
$=\log|2x-1|-\log|2x+1|$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{(2x-1)'}{2x-1}-\frac{(2x+1)'}{2x+1}\\&=\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}\\&=\frac{2\{(2x+1)-(2x-1)\}}{(2x-1)(2x+1)}\\&=\frac{4}{(2x-1)(2x+1)}\end{aligned}$$

✏**注** log を分解せずに，まともに微分しても構いません．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)'}{\dfrac{2x-1}{2x+1}}=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)'\cdot\frac{2x+1}{2x-1}\\&=\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x+1)^2}\cdot\frac{2x+1}{2x-1}\\&=\frac{4}{(2x+1)^2}\cdot\frac{2x+1}{2x-1}\\&=\frac{4}{(2x-1)(2x+1)}\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x^2-4)'}{x^2-4}=\dfrac{2x}{x^2-4}$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\tan x}$

(5) **解**（慎重派）
$\log x=u$ とおくと，$y=u^3$ であり，
$\dfrac{dy}{du}=3u^2$，$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$ なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\cdot\frac{1}{x}=\frac{3(\log x)^2}{x}$$

解（ザックリ派）
$\dfrac{dy}{dx}=3(\log x)^2\cdot(\log x)'=\dfrac{3(\log x)^2}{x}$

(6)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=2(x\log x-x)\cdot(x\log x-x)'\\&=2(x\log x-x)(1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}-1)\\&=2(x\log x-x)\log x\end{aligned}$$

✏**注** $(x\log x-x)'$ の部分は，積の微分公式を用いています．つまり

$$\begin{aligned}&(x\log x-x)'\\=&x'\log x+x(\log x)'-x'\\=&1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}-1\\=&\log x\end{aligned}$$

(7) $\dfrac{dy}{dx}=e^{4x}\cdot(4x)'=4e^{4x}$

(8)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(x+3)'e^{-x}+(x+3)(e^{-x})'\\&=e^{-x}+(x+3)(-e^{-x})\\&=(1-x-3)e^{-x}=-(x+2)e^{-x}\end{aligned}$$

✏**注** 言うまでもなく，$(e^{-x})'$ については

$$(e^{-x})'=e^{-x}(-x)'=-e^{-x}$$

となります．

(9)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'\\&=2xe^x+x^2(e^x)=(x^2+2x)e^x\end{aligned}$$

(10)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(e^x)'\cos x+e^x(\cos x)'\\&=e^x\cos x+e^x(-\sin x)\\&=e^x(\cos x-\sin x)\end{aligned}$$

(11)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(e^x)'\tan x+e^x(\tan x)'\\&=e^x\tan x+e^x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\\&=e^x\left(\tan x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\end{aligned}$$

(12)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=e^{x^2+2x}\cdot(x^2+2x)'\\&=(2x+2)e^{x^2+2x}\end{aligned}$$

(13)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{(2x)'}{2x\log 4}=\frac{2}{2x\log 4}\\&=\frac{1}{x\log 4}=\frac{1}{2x\log 2}\end{aligned}$$

(14) **解**（慎重派）
$x^2-1=u$ とおくと，$y=\log_a u$ であり，
$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u\log a}$，$\dfrac{du}{dx}=2x$ なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u\log a}\cdot 2x=\frac{2x}{(x^2-1)\log a}$$

解（ザックリ派）
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)\log a}=\dfrac{2x}{(x^2-1)\log a}$

(15)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=a^{-3x}\log a\cdot(-3x)'\\&=-3a^{-3x}\log a\end{aligned}$$