第５章　微分法

3　いろいろな関数の導関数

最初にこんなことを言ってしまうとアレなんですが，$\boxed{279}$と$\boxed{280}$さえできれば，この節の問題は別にやらなくても良いですよ．

百歩譲って，今やるなら$\boxed{281}$と$\boxed{283}$，この先できたほうが良いのは$\boxed{283}$と$\boxed{287}$だけかなあ．

$\boxed{281}$ これまで学習した微分公式を総動員しますが，メインは合成関数の微分ですね．

▷Point◁

合成関数の微分の基本姿勢

まずは式全体を大きく見て大ざっぱにザックリ微分．その後で中身の微分をくっつける．

に従います．

(1) は，まず $\sin 3x$ をひとまとめに考えると，単なる $◯^2$ の形です．よって，

$$y' = 2\sin 3x \cdot (\sin 3x)'$$

$(\sin 3x)'$ は問題ないでしょう．$3x$ をひとまとめに考えてザックリ微分です．

(2) は積の微分公式を使います．

$$y' = (\sin^5 x)' \cdot \cos 5x + \sin^5 x(\cos 5x)'$$

$(\sin^5 x)'$ や $(\cos 5x)'$ も問題ないでしょう．

(3) もいきなり積の微分公式を使ってもかまいませんが，2 倍角の公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ を使えば

$$y = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4 = \frac{1}{16}\sin^4 2x$$

となるので，積の微分公式は不要になります．

(4) と (5) は典型的な合成関数の微分．落ち着いて計算してください．

(6) はちょっとの工夫で驚くほど簡単になるでしょう．いきなり微分するのではなく，まずは，( ) の中身を計算してみてください．

(7) と (8) は商の微分公式に当てはめるだけですね．

まあ，このレベルの微分ができれば十分でしょう．なお，「解答と自分の答えが違う」という質問（？）をよく受けますが，式変形して同じになるのであれば全く気にしないでよろしい．なぜなら・・・まあ，そのうち分かります．だって，「微分する」のが目的じゃないんだも〜ん．

$\boxed{282}$ この問題も別にやらんでもいいけど，どうせやるなら工夫してやりましょう．この問題は，微分どうこうよりも，三角関数の式を少しいじくってから処理すると楽だよ，ということを知らしめたいのでしょう．

(1) はいきなり「積の微分公式」を使ってもかまいませんが，三角関数の積和公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

を使うと一瞬でできます．なぜならこの公式に当てはめると

$$\sin(x+a)\cos(x-a) = \frac{1}{2}\{\sin 2x + \sin 2a\}$$

となるからです．x で微分するので $\sin 2a$ は定数扱いです．だから消えてなくなる！

(2) もそのままやろうとすると結構キツイ．まずは両辺を 2 乗して

$$y^2 = a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x$$

としよう．さらに $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので

$$y^2 = a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2 x$$

この両辺を x で微分すると，

$$2yy' = (b^2 - a^2)2\sin x\cos x$$

つまり

$$y' = \frac{(b^2 - a^2)\sin x\cos x}{y}$$

です．簡単でしょ．

やっぱり，こうやりたいね．

$\boxed{283}$ 「なんでいきなり極限値の計算問題があるの？」と思うかもしれませんが，そもそも「微分する」とは，導関数の定義にしたがって，極限値の計算をすることだったわけですから，別にあってもおかしくなりません．

今回は，微分係数の定義

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

を使います．これらの式の意味についてはすでに学習済みなので省略します．分からない人は「微分のココロ」を熟読のこと．

さて，この問題は，いかにしてこの「微分係数の定義」に当てはめるか，がポイントとなります．

(1) の場合，とりあえず $f(x)=\sin x$ とおくと，

$$与式=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{f(x-a)}$$

となります．微分係数の定義式に当てはめるために少々式をいじくって

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{f(x-a)}$$

とします．前半部分は

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\cos a$$

後半部分はどうなるのでしょうか．

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sin(x-a)}$$

$x-a=t$ とでも置き換えると，アレになりますね．アレよ～アレアレ．

(2) は $\boxed{276}$(4) が強烈なヒントになっています．ていうかほとんど同じ．途中の式変形を紹介すると

与式

$$=\lim_{x\to a}\frac{-a^2(\sin x-\sin a)+x^2\sin x-a^2\sin x}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-a^2(\sin x-\sin a)+(x^2-a^2)\sin x}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{-a^2\frac{\sin x-\sin a}{x-a}+\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}\sin x\right\}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{-a^2\frac{\sin x-\sin a}{x-a}+(x+a)\sin x\right\}$$

ここまでくれば何とかなるでしょう．

$\boxed{284}$ $\boxed{281}$ と同じく．今度は指数，対数関数部門．

(1) は余裕．積の微分公式を使います

(2) は $\sin x$ をひとまとめに考えます．

(3) は底の変換公式をつかうと

$$y=\log_x a=\frac{\log a}{\log x}$$

なります．当然ながら，$\log a$ は定数（係数）です．

(4)(5)(6)(7) は真数内をひとまとめに考えます．$\log f(x)$, $\log_a f(x)$ の微分はどうでしたっけ？有名です．

(8) はそのまま微分するよりは

$$y=\log(x^2-b)-\log(x^2+b)$$

と分解してから微分したほうが計算が楽です．

$\boxed{285}$ 今度は「対数微分法」ですか・・・これも，あんまり意味ないねえ．別にやらんでよろしい．詳しくは「微分のココロ」を参照してください．

$\boxed{286}$ ほとんどやる必要ないですね．こんな関数見たことありません．この先々，永遠に登場しないでしょうね．もし万が一，出題されたら，そのときにやればよろしい．

詳しくは「微分のココロ」を参照してください．

$\boxed{287}$ これは今後につながる重要な問題です．ポイントは上手く置き換えして条件式が使える形に変形することです．

(1) は置き換えの必要はありません．

$$\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\log(1+x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2) は

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

として，$\dfrac{1}{x}=t$ とおけばよいでしょう．

(3) は $2x=t$ とすれば，

$$(1+2x)^{\frac{1}{x}}=(1+t)^{\frac{2}{t}}=\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2$$

(4) は $-\dfrac{2}{x}=t$ とすれば

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=(1+t)^{-\frac{2}{t}}=\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-2}$$

いずれも，条件式 $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ が登場していますね．

詳しくは「微分のココロ」を参照してください．