第 2 章　式と曲線

1　放物線

57 放物線の定義に当てはめるだけ．
$y^2 = 4px$ のとき，
$\longrightarrow$ 焦点が $(p,\ 0)$，準線が $x = -p$
$x^2 = 4py$ のとき，
$\longrightarrow$ 焦点が $(0,\ p)$，準線が $y = -p$
になります．図示は問題ないでしょう．

58 上の問題の逆．
焦点が $(p,\ 0)$，準線が $x = -p$ のとき，
$\longrightarrow y^2 = 4px$
焦点が $(0,\ p)$，準線が $y = -p$ のとき，
$\longrightarrow x^2 = 4py$
です．

59 (1) も (2) も頂点が原点で，軸や焦点の位置から，$y^2 = 4px$ または $x^2 = 4py$ とかけるはずです．どっちがどっちでしょう．それが間違わなければ，通る点を代入するだけなのでカンタンですね．

60 単なる軌跡の問題です．点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおいて X と Y の関係式を作ればよいのです．
(1) の場合，中心を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，直線 $x = -2$ に接する円の半径は $|X+2|$ になりますが，点 $(2,\ 0)$ を通ることから，$X > -2$ なので，半径は $X+2$．
よって，円の方程式は

$$(x-X)^2 + (y-Y)^2 = (X+2)^2$$

となります．この円が点 $(2,\ 0)$ を通るので

$$(2-X)^2 + (0-Y)^2 = (X+2)^2$$

これを展開すれば X と Y の関係式が得られるので，これが求める点 P の軌跡です．
(2) の場合は少し注意が必要です．図を描けば分かりますが，円 $x^2+(y+2)^2 = 1$ に外接する場合と内接する場合があります．それぞれ関係式が違います．
つまり，外接する場合，中心間の距離が半径の和に等しく，内接する場合，中心間の距離が半径の差に等しくなります．

まず，中心を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，直線 $y = 1$ に接する円の半径は $|Y-1|$ になりますが，$x^2+(y+2)^2 = 1$ に接することから，$Y < 1$ なので，半径は $1-Y$．
よって，外接する場合の関係式は，中心間の距離が半径の和に等しいので，

$$\sqrt{(X-0)^2 + (Y+2)^2} = (1-Y)+1$$

また，内接する場合の関係式は，中心間の距離が半径の差 (の絶対値) に等しいので，

$$\sqrt{(X-0)^2 + (Y+2)^2} = |(1-Y)-1|$$

これらを展開すれば X と Y の関係式が得られるので，これが求める点 P の軌跡です．

61 まず，焦点は $(0,\ 1)$，準線は $y = -1$ です．
次に，$\triangle\mathrm{PFH}$ が正三角形になるので

$$\mathrm{PF} = \mathrm{FH} = \mathrm{HP}$$

しかし，放物線の性質 (定義) から $\mathrm{PF} = \mathrm{HP}$ は成立することが保証済みなので，実質的に

$$\mathrm{FH} = \mathrm{HP}$$

だけを考えればよいですね．この関係式から a が求まります．a が分かればあとは何とかなるでしょう．
$\triangle\mathrm{PFQ}$ の面積は頂点 P，F，Q の座標からやみくもに力任せに計算するのではなく，ちょっと工夫したいですね．$\triangle\mathrm{PFH}$ が正三角形ですし．

62 特に問題ないでしょう．境界線を図示し，図のどちら側になるのか考えます．最初は，テキトーな点を代入して確認してください．
境界線を含むか，含まないかについても一言述べておこう．

63 密かに重要な問題．今後，この考え方が数学のあらゆる場所で登場するでしょう．
$(u,\ v)$ がデタラメに動きまくるんだから，$(x,\ y)$ もデタラメに動きまくるような気がしますが，違います．

例えば，$(x,\ y)=(6,\ 5)$ となることはあるでしょうか．つまり

$$\begin{cases} uv=6 \\ u+v=5 \end{cases}$$

を満たす u，v はあるでしょうか．解と係数の関係から，u，v は

$$t^2-5t+6=0$$

の 2 つの解です．実数解をもちますか？

では，$(x,\ y)=(1,\ 1)$ となることはあるでしょうか．つまり

$$\begin{cases} uv=1 \\ u+v=1 \end{cases}$$

を満たす u，v はあるでしょうか．解と係数の関係から，u，v は

$$t^2-t+1=0$$

の 2 つの解です．実数解をもちますか？

このことからもわかるように，点 $(x,\ y)$ は何でもよいわけではありませんね．

「u，v が実数値にきちんと定まるような $(x,\ y)$ を寄せ集める」と考えます．上の例からも分かるように，u，v は

$$t^2-(u+v)t+uv=0$$

すなわち

$$t^2-yt+x=0$$

の 2 つの実数解のことです．この 2 次方程式が実数解をもつ条件を考えればよいのです．

ちなみに，この考え方をテーマにした問題をよく出題するのが東京大学です．