第2章　式と曲線

2　楕円

64 楕円の定義に当てはめるだけです．楕円の基本形は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ですが，$a>b>0$ か $0<a<b$ かで焦点の座標が変わってきます．なぜなら，楕円が横長になったり，縦長になったりするからで，それに伴い，焦点の位置も横長の場合は x 軸上，縦長の場合は y 軸上に存在します．間違えないようにしよう．

65 楕円の基本形の式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を見ただけで，焦点の座標や 2 つの焦点からの距離の和が分かるので，それに当てはめれば答えは出ます．おそらく模範解答もそうさせてるんでしょうが，せっかくなので勉強のために軌跡の発想できっちり求めてみよう．そもそも，この発想から楕円の基本形が求められたわけです．(1) と (2) のうち，どちらか一方を公式に当てはめる方法で，どちらか一方を軌跡の考え方で解いてみてください．
楕円上の点を $(X,\ Y)$ とおきます．
(1) の場合，

$$\sqrt{(X-4)^2+(Y-0)^2}+\sqrt{(X+4)^2+(Y-0)^2}=10$$

(2) の場合，

$$\sqrt{(X-0)^2+(Y-2)^2}+\sqrt{(X-0)^2+(Y+2)^2}=6$$

これらの式を整理すれば楕円の式が出てきます．結構ムズイですよ．でも，これも勉強．(1) と (2) のうちどっちか一方だけでいいからね．

66 別にやらんでも良いです．ようするに，「『楕円』とは円を伸ばしたり縮めたりしたものだ」ということを式の上でも確認してくれというだけ．もし「1 次変換」を学習するのであれば，この発想はそれなりに有効なんですが，「1 次変換」亡き現在はほとんどナンセンスです．

67 楕円の基本形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ からスタート．当てはめれば何とかなるでしょう．

68 重要問題．最近，阪大でも類題が出題されています．上の類題 6 とほとんど同じなので真似してやってください．

69 問題文の通りに立式するだけです．楕円に内接する長方形の座標を設定するのですが図の対称性から第 1 象限の座標だけをおけばよいでしょう．その頂点を $(p,\ q)$ とすると．長方形の周の長さは $4(p+q)$ です．また言うまでもなく，頂点は楕円上にあることもお忘れなく．

70 毎年，質問の多い問題．
前問同様に第 1 象限の点を $(p,\ q)$ と設定すると長方形の面積は $4pq$ です．また頂点が楕円上にあることも考慮すれば，この問題は

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1 \text{ のとき，} 4pq \text{ の最大値は？}$$

という問題になったわけです．さて，どうしましょうか．いろいろな方法が考えられますね．

方法 ① 相加相乗平均の利用
これはもう式を紹介すれば答えを言ってるのと同じになるんですが，教えます．
相加相乗平均の大小関係より

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\geqq 2\sqrt{\frac{p^2}{a^2}\cdot\frac{q^2}{b^2}}$$

$\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}=1$ なので

$$1\geqq 2\frac{pq}{ab}$$

つまり，$2ab\geqq 4pq$ となるので，$4pq$ は $2ab$ 以下であることが分かります．しかし，これが最大値かどうかはまだ分かりません．あく

までも $2ab$ より大きくはならない，と言っているだけで $2ab$ になるかどうかはわかりません．そうです，等号が成立する p，q がちゃんと定まるかどうかを確認せねばなりませんね．

$\boxed{\text{方法 ②}}$ 媒介変数表示 (三角関数) の利用

今後につながる重要な解法を紹介しよう．個人的には，相加相乗平均を利用するより，こっちの方法の方が好きです．

$\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}=1$ のとき，

$$p=a\sin\theta, \qquad q=b\cos\theta$$

と表すことができます．(p，q) は第 1 象限の点なので，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ です．このとき，

$$4pq=4ab\sin\theta\cos\theta$$

なので，この問題は

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$4ab\sin\theta\cos\theta$ の最大値は？

という問題になります．

$$4ab\sin\theta\cos\theta=2ab\sin 2\theta$$

なので，$0<2\theta<\pi$ を考慮すれば，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $2ab$ であることがカンタンに分かります．このときの p，q は

$$p=a\sin\frac{\pi}{4}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$q=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

と，これまたカンタンに求まります．
かっこよくないですか？

$\boxed{71}$ ここから軌跡の問題 3 連発．いずれも重要な問題です．たまたま楕円が話題に上がっているだけで，手法は数学 Ⅱ の内容です．P19 下部の「ヒント」欄に軌跡を求める基本的な流れが書いてあるのでそれに従います．
いずれも時間の流れにそって立式することがポイント．つまり点 P やら Q やらは，点 A，B の動きに依存しているわけで，点 A，B が決まってから点 P，Q が決まるわけですね．

(1) だけやってみます．点 P の軌跡を求めるので P(X，Y) とおきますが，先ほど述べたように，点 A，B が決まらないと点 P は決まらないので，点 A，B の座標も設定せねばなりません．
A(s，0)，B(0，t) とすると，AB の長さが 8 なので

$$s^2+t^2=64$$

P は AB の内分点なので

$$X=\frac{3\cdot s+5\cdot 0}{5+3}=\frac{3s}{8}$$

$$Y=\frac{3\cdot 0+5\cdot t}{5+3}=\frac{5t}{8}$$

よって，関係式は

$$\begin{cases} s^2+t^2=64 \\ X=\dfrac{3s}{8} \\ Y=\dfrac{5t}{8} \end{cases}$$

なので，ここから s，t を消去して X と Y だけの式を作ればよいのです．

$\boxed{72}$ 軌跡の基本に従います．点 P(X，Y) とおいて，X と Y の関係式を作ればよいのです．前問同様，点 Q が決まらないと点 P は決まらないので，まずは Q(s，t) とおきます．当然ながら $\dfrac{s^2}{16}+\dfrac{t^2}{9}=1$．よって，関係式は

$$\begin{cases} \dfrac{s^2}{16}+\dfrac{t^2}{9}=1 \\ X=\dfrac{s}{2} \\ Y=\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

なので，ここから s，t を消去して X と Y だけの式を作ればよいのです．
数学 Ⅱ の 4step $\boxed{209}$(2) も参照のこと．

$\boxed{73}$ 定番問題．まずは Q(s，t) とおきます．当然ながら $\dfrac{s^2}{36}+\dfrac{t^2}{9}=1$．G は △AQB の重心なので，

$$X=\frac{-2+2+s}{3}=\frac{s}{3}$$

$$Y=\frac{0+0+t}{3}=\frac{t}{3}$$

よって，関係式は

$$\begin{cases} \dfrac{s^2}{36}+\dfrac{t^2}{9}=1 \\ X=\dfrac{s}{3} \\ Y=\dfrac{t}{3} \end{cases}$$

なので，ここから s, t を消去して X と Y だけの式を作ればよいのです.
数学 II の 4step $\boxed{209}$(3) を参照のこと.

さて，$\boxed{71}$, $\boxed{72}$, $\boxed{73}$ の軌跡の問題ですが，何か忘れてませんか？機械的な計算で軌跡の方程式は出てきますが，それで十分ですか. 軌跡には限界 (制限・範囲) がある場合があって，必ず確認せねばなりません．例えば $\boxed{73}$ の場合，点 Q の場所によっては三角形ができない (グッシャッと潰れてしまう) 場合があります．そうなる場合を除く必要がありますね.