第 2 章　式と曲線

3　双曲線

$\boxed{74}$ 双曲線の定義に当てはめるだけです．双曲線の基本形は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\longrightarrow$ 焦点は $(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$．

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

$\longrightarrow$ 焦点は $(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2})$．

の 2 通りあるので，焦点や場所など間違えないようにしよう．

漸近線はどちらの場合も，$\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$ です．

$\boxed{75}$ 前問と同じく，ヤッカイなのは，双曲線の場所によって式の基本形がわかってくることです．最初に式を設定するときに，どちらからスタートするのかを間違えないようにしよう．双曲線の場所は焦点の座標を見れば分かるでしょう．焦点が分からない場合は・・・・まあどっちになるか自分で考えましょう．

なお，(1) は双曲線の定義です (差が一定である点の集合)．基本形の式から焦点や差がわかるので当てはめるだけなんですが，せっかくなので勉強のために軌跡の発想できっちり求めてみよう．そもそも，この発想から双曲線の基本形が求められたわけです．

双曲線上の点を $(X,\ Y)$ とおきます．

(1) の場合，

$$\left|\sqrt{(X-4)^2+(Y-0)^2}-\sqrt{(X+4)^2+(Y-0)^2}\right|=4$$

この式を整理すれば双曲線の式が出てきます．結構ムズイですよ．でも，これも勉強．

$\boxed{76}$ まずは，焦点と漸近線を求めます．

焦点は 2 点 $(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$．

漸近線は $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$．

焦点と漸近線の距離は「点と直線の距離の公式」を利用すればよいですが，焦点が 2 個，漸近線が 2 本なので，真面目にやれば 4 通りの組合せを計算することになります．まあ，計算練習と思ってやってもらってもかまいませんが，図の対称性を考えれば 1 通りで十分でしょう．もちろん「図の対称性を考慮して・・・」と断ってからですけど．

得られた結果が不思議でしょう？

$\boxed{77}$ まず $(2,\ p)$ が楕円上にあることから p の値が決まります．また，楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の焦点は分かります．焦点と通る点が分かれば $\boxed{75}$(2) と全く同じですね．

$\boxed{78}$ 直感的に考えればアタリマエですね．なぜなら直角双曲線は 45 度回転させると，漸近線が x 軸，y 軸になって，いわゆる反比例のグラフになります．反比例のグラフは「積が一定」になので，題意の結果が成立するのは当然のことです．

しかしながら，今回はその当然のことを証明せよということなので，まじめにコツコツ計算しましょう．

漸近線は $x\pm y=0$．とりあえず点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ とでもおいて，点と直線の距離の公式をつかって，PQ，PR を計算します．なお，点 P は双曲線上の点なので，$p^2-q^2=a^2$ が成立することをうまく利用してください．

次節の例題 8 に直角双曲線を 45 度回転させるとどのようになるのか，という問題が載ってるのでチラッと見ておこう．

$\boxed{79}$ 単なる軌跡の問題です．点 $\mathrm{P}(X,Y)$ とおいて，X と Y の関係式を作ればよいのです．

とりあえず問題文の通りに立式すると，なかなかイカツイ式が出てきます．

$$\{(X-a)^2+Y^2\}\{(X+a)^2+Y^2\}$$
$$=\{X^2+(Y-b)^2\}\{X^2+(Y+b)^2\}$$

ちょっと展開すると，

$$(X^2-2aX+a^2+Y^2)(X^2+2aX+a^2+Y^2)$$
$$=(X^2+Y^2-2bY+b^2)(X^2+Y^2+2bY+b^2)$$

ここからがポイント．闇雲に展開し始めると，分けわかんなくなります．この問題はここから先の計算を上手くやることが目的なのでしょう．こういう計算でセンスが表れます．

上手く置き換えすると，左辺側，右辺側がそれぞれ$(\quad)^2-(\quad)^2$ の形になると思います．さあ，あとは頑張ってください．最後まで気を抜かないこと．