第2章　式と曲線

5　2次曲線と直線

2次曲線に関する問題の中で最も重要で，入試などでよく出題されるのがこの章の内容です．基本的な考え方は，数学 II で学習した「円と直線」の関係と同じですが，計算がかなりメンドクサイので，要領よくする必要があります．

89 機械的に連立して2次方程式を解くだけですが，勉強のためにそれぞれのグラフを図示しておいてください．

90 こういう問題が数学 II の「円と直線」に似ているところです．連立してでてきた2次方程式の判別式 D の符号で決まります．
なお，「円と直線」の場合は，点と直線の距離の公式を利用して，半径と中心から直線への距離とを比較する方法もありましたが，今回の場合は残念ながら連立して判別式を使うしかありません．

91 前問同様．共有点の個数は，連立してでてきた2次方程式の判別式の符号で決まります．

92 真面目に連立して共有点を求めてもよし，共有点の x 座標を α，β とでもおいて解と係数の関係を用いてもよし．言うまでもなく，共有点の x 座標は連立してでてくる x の2次方程式のことです．

93 重要な問題．必ずできるようになっておこう．このタイプの問題は，
① 初めに，接線をおく
② 初めに，接点をおく
の2通りのアプローチがあります．どちらも重要な方法ですが一長一短です．今回は，①の方法でやってみましょう．
(1) は (3,　0) を通る直線なので $y = m(x-3)$ とおけます．これが楕円に接するわけです．
(2) は傾きが1の直線なので $y = x+q$ とおきましょう．これが双曲線に接するわけです．
いずれも連立して2次方程式をつくり，判別式 $D=0$ でおわり．
② の接点から始める方法は $\boxed{96}$ 以降の問題でやりましょう．

94 典型的な軌跡の問題で，これも非常に重要な問題です．まずは上の例題9をじっくり読むこと．(1) はそのまんまですね．(2) も直線を $y = 2x+k$ とおけばほとんど同じ．いずれも2点で交わることから k の範囲が決まります．交点の x 座標は α，β とでもおいて解と係数の関係を使おう．この辺の計算は $\boxed{92}$ が参考になるでしょう．
必ずできるようになっておいてください．

95 問題文より楕円の式が $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおけることがわかります．あとは，この楕円と $y=2x+5$ が接するのだから，当然，連立して判別式 $D=0$ です．

96 まずは2つの曲線を簡単に図示してみよう．まずは「共通接線」がどんな位置に，どんな感じにあるのか想像できるでしょうか．
アプローチはいくつかあります．計算がメンドウだけど一番ストレートなのは，接線の方程式を $y=mx+n$ とでもおき，放物線，円それぞれの式に代入して判別式 $D=0$ とすれば，m，n の連立方程式ができるので解けば終わり．でも，一見して計算がかなりメンドウになることが予測されます．
次の方法は接点を設定するもの．円上の点における接線の公式は数学 II で学習しましたが覚えていますか．

> 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(p,\ q)$ における接線の方程式は
>
> $$px+qy=r^2$$
>
> である．

これを使います．つまり，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $(p,\ q)$ における接線の方程式は $px+qy=1$ なので，これを放物線の式に代入して判別式 $D=0$ とします．いうまでもなく，点 $(p,\ q)$ は円上の点なので，

$p^2+q^2=1$ です．これらの関係式から p と q が求まります．

$\boxed{97}$ これも重要ですが本格的な大学入試問題なので今は解けなくても良いでしょう．これも様々なアプローチがあります．
まずは直線を設定する方法．つまり点 $(3,\ 4)$ を通る直線を $y-4=m(x-3)$ とおき，楕円の式に代入して判別式 $D=0$ をときます．慎重に計算をすればおそらく m の 2 次方程式が出てくると思います．
さて，この m の 2 次方程式は何を意味しているのでしょうか．楕円の外部の点から接線は 2 本引けます．今回の場合も 2 本引けるはずで，その 2 本の接線の傾きが m の 2 次方程式の解になるのです．
2 本の接線が直行するということは傾きの積が -1 になればよい．つまり m の 2 次方程式の 2 つの解の積が -1 ということです．2 次方程式の解の積は式のどの部分に注目するんでしたっけ．

$\boxed{98}$ この問題文の下のほうに 2 次曲線の接線の公式が書いてあります．この中の双曲線の場合を証明するというものです．実は証明は，今の範囲内で証明するのはかなりメンドウで難しいです．後ほど学習する「陰関数微分」を利用すれば簡単に求めることができるので，そのときにやりましょう．今は結果を覚えておくだけでよいです．
すでに数学 III の犬プリ「接線の話」で解説してあるので，いち早く知りたい人は先読みしておこう．

$\boxed{99}$ 2 次曲線上の点における接線の公式 ($\boxed{99}$ のチョイ上に小さく書いてある) を使おう．この公式は必ず覚えておこう．
なお，陰関数微分というワザも後ほど習います．$\boxed{299}$ をチラッと先読みしてみてください．

$\boxed{100}$ 先ほどの公式を使います．(1) を例にやってみます．ポイントは「接点を設定する」ということ．
接点を $(p,\ q)$ とします．まず，この点は楕円上の点なので $4p^2+q^2=4$ が成立．またこの点における接線の方程式は $4px+qy=4$．これが点 $(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$ を通るので，$4\sqrt{5}p+2\sqrt{5}q=4$．
これで p と q の式が 2 つ出たので，p と q を求めることができます．

$\boxed{101}$ ああこれも入試問題．類題が阪大理系で出題されました．当然ながら AB を底辺として高さを考えます．高さが最長になれば面積は最大になります．図示すれば何となくその場所が分かると思いますが，具体的には点 P はどういう点でしょうか？　ヒントは点 P で接線を引いてみてください．何かに平行になってませんか？その接線の傾きは・・・・

$\boxed{102}$ これも重要問題．入試問題レベルですが，指示通りに計算を進めれば解答できます．．まず焦点を確認しよう．焦点は $(p,\ 0)$ ですね．次に接線を考えます．接点を設定し公式を使おう ($\boxed{99}$ の上に書いてある)．
接点を $(a,\ b)$ とすると，接線の方程式は $by=2p(x+a)$．つまり $y=\dfrac{2p}{b}(x+a)$．
焦点から接線に下ろした垂線の傾きは $-\dfrac{b}{2p}$ なので垂線の方程式は $y=-\dfrac{b}{2p}(x-p)$．
これと接線の方程式を連立すれば点 Q の座標がわかります．これが y 軸上にあるには，x 座標が 0 になれば良いということです．
なお，接点 $(a,\ b)$ は放物線上にあるので $b^2=4pa$ という関係があることも忘れないように．

$\boxed{103}$ まずは境界線を図示します．慣れれば式を見た瞬間にどの部分が相当するのか (境界線の内側か外側か) がわかりますが，最初のうちはテキトーに点を入れてみて (例えば原点とか)，その点が式を満足しているのかチェックして，図示しても良いでしょう．あくまでも，最初のうちだけですが．

$\boxed{104}$ (1) はこれまで通り，連立して判別式 $D\geqq 0$ で終わり．

(2) も典型問題．$2x+3y$ はこのままだと単なる式ですが，$2x+3y=k$ と置いた瞬間に直線としての意味を持ち始めます．不等式 $4x^2+9y^2 \leqq 36$ が楕円の内部を表しているので，この内部領域と直線 $2x+3y=k$ が共有点をもつ k の範囲を考えればよいのです．

つまり，計算だけなら (1) と全く同じです．

$\boxed{105}$ 連立方程式を解くだけですが，うまく連立しないと 4 次方程式が出てきてしまいます．できることなら次数の低い方程式にしたいところ．