第 1 章　場合の数と確率

9　反復試行の確率

103 基本問題．必ずできるようになっておこう．
(1) は 4 回のうち 2 回 1 の目が出て，残り 2 回は 1 以外の目が出る場合です．1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$，1 以外の目が出る確率は $\frac{5}{6}$ なので公式に当てはめれば，

$$ {}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 $$

となりますが，なぜこの式で求められるのか説明できますか．
1 の目が出る場合を ○，1 以外の目が出る場合を × で表すと，4 回投げるときの目の出方とそのときの確率は

$$ \bigcirc\bigcirc\times\times \longrightarrow \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 $$
$$ \bigcirc\times\bigcirc\times \longrightarrow \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 $$
$$ \bigcirc\times\times\bigcirc \longrightarrow \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 $$
$$ \times\bigcirc\bigcirc\times \longrightarrow \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 $$
$$ \times\bigcirc\times\bigcirc \longrightarrow \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 $$
$$ \times\times\bigcirc\bigcirc \longrightarrow \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 $$

です．これらを全部足せばよいのです．
○ や × の順番が変わっても，確率をかければすべて $\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$ で同じなので，要するに，$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$ を何回足すのか，を考えます．
足す回数は ○ が 2 個，× が 2 個の順列の総数だから，${}_4C_2$ 通り．
よって，「$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$ を ${}_4C_2$ 回足す」，つまり，「$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\times{}_4C_2$」で求められるのです．
(2) も同様．4 回のうち 3 回奇数の目が出て，残り 1 回は偶数の目が出る場合なので，

$$ {}_4C_3\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2 $$

となります．

104 これも基本問題．必ずできるように．玉をいちいち戻すから，白玉，赤玉を取り出す確率は常に一定です．
(1) は 6 回のうち白玉が 2 回，赤玉が 4 回出る場合なので

$$ {}_6C_2\left(\frac{3}{9}\right)^2\left(\frac{6}{9}\right)^4 $$

(2) について．「白玉が 5 回以上」とは 5 回または 6 回出るときです．
6 回のうち白玉が 5 回，赤玉が 1 回出る場合の確率は，

$$ {}_6C_5\left(\frac{3}{9}\right)^5\left(\frac{6}{9}\right)^1 $$

6 回のうち白玉が 6 回，赤玉が 0 回出る場合の確率は，

$$ {}_6C_6\left(\frac{3}{9}\right)^6\left(\frac{6}{9}\right)^0 $$

これらを足せばよいのです．
(3) は，「6 回目に 2 度目の白が出る」ということは，「5 回目まで白が 1 回，赤が 4 回出て，6 回目に白がでる」場合です．式は大丈夫ですね．

105 5 回中少なくとも 2 回当たるということは，下の※印の場合です．

	当たり	ハズレ
※	5 回	0 回
※	4 回	1 回
※	3 回	2 回
※	2 回	3 回
	1 回	4 回
	0 回	5 回

4 つの場合をそれぞれ計算して足しても良いですが，どう考えても，※印が付いていないところを足して全体 (つまり確率 1) から引いたほうが早いですね．

106 A が 1 の目を出したからといって，それにつられて，B も 1 の目を出すなんてことは絶対にありません．このように 2 つの試行が互いに影響を及ぼさないことを「独立である」といい，2 つの試行が同時に起こる確率はそれぞれの確率をかければ良いのです (足すんじゃないですよ！)．

3 または 6 の目が出る確率は $\frac{2}{6}$．それ以外の目が出る確率は $\frac{4}{6}$．4 回中 3 回以上 3 または 6 の目が出るのは，

$$ {}_4C_3\left(\frac{2}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)^0 $$

A も B もこの確率で同じなので，この結果を 2 回かける，つまり 2 乗することになります．

107 重要な問題です．座標の目盛が $+2$ または -1 で変化します．4 回の中で $+2$ と -1 がそれぞれ何回ずつ行われるのかを突き止めよう．
$+2$ が x 回，-1 が y 回とします．まずは全部で 4 回なので

$$x+y=4$$

次に，座標の目盛の変化は

$$(+2)\times x+(-1)\times y=2x-y$$

です．
(1) の場合，初め原点 O にいた点が $+8$ の点に移動するので，$2x-y=8$．$x+y=4$ と連立させれば x と y が求まります．(2)(3) も同様です．
$+2$ と -1 の回数が確定すれば，$+2$ になる確率が $\frac{4}{6}$，-1 になる確率が $\frac{2}{6}$ なので，これまで通りの計算で OK ですね．

108 先ほどの数直線上の移動と全く同じ．ようするに，$+50$ になる確率が $\frac{2}{6}$，-20 になる確率が $\frac{4}{6}$ です．6 回で $+160$ になるには，それぞれ何回ずつになるのか x，y の連立方程式を解いて調べればよいのです．

109 1 つの製品を取り出すとき不良品である確率が $\frac{3}{10}$，良品である確率が $\frac{7}{10}$ ということです．
(1) は不良品 2 個，良品 1 個を取り出す場合で，(2) は，「不良品 1 個かつ良品 2 個」または「不良品 3 個」を取り出す場合です．これも計算は大丈夫でしょう．
それにしても不良品が 30 %もあるのはちょっと多すぎますね・・・まあ気にしないでおきましょう．

110 道順の総数は「同じものを含む順列」の考え方で求めることができます．例えば A から C に行く場合，行き方は ${}_3C_2$ 通りです．それに確率が絡んでくるわけですが，実際に自分が道に沿って歩く様子をイメージをすると，目の前の進むべき道の選択を迫られることが 3 回あると思います．つまり $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ です．
よって，求める確率は ${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3$．B から D に行く確率も同じですね．CD 間で遭遇するには・・・まあ分かるでしょう．

111 なかなか難しい問題．大学入試問題に使えそうです．落ち着いて状況を分析しましょう．
(1)5 回目に B が勝つには，5 回目に 4 回目の裏が出ればよいので，4 回目までに表が 1 回，裏が 3 回でればよいですね．
(2)A と B が勝つ確率ですが，最初に何を考えますか？僕が真っ先に考えたのは「引き分けはあるのか」ということです．引き分けがない，つまり A と B のどちらかが必ず勝つんだから，A の勝つ確率と B の勝つ確率を足すと 1 になるはずです．ということは，どちらか一方の確率が分かれば，もう一方も分かります．じゃあ，A と B のどちらを先に求めましょうか？　(1) を振り返ると，B が勝つ確率を考えたほうがよさそうですね．
B が勝つのはどういう場合でしょうか．まず裏が 4 回で勝ちなので，最低 4 回は必要です．
まず，4 回目で勝つ場合．最初から裏ばかり 4 回出ればよいですね．
次に 5 回目で勝つ場合．(1) で求めました．
では，6 回目で勝つ場合．6 回目に 4 回目の裏がでるから 5 回目までに表が 2 回，裏が 3 回出ればよいですが，となると A が勝ってしまうので意味なしです．つまり 6 回目で B が勝つことはありません．ということは，4 回目で勝つ場合と 5 回目で勝つ場合を足せば終わりです．

最後に，もう少しコメントします．
なぜ B の確率を計算しようと思ったのでしょうか？ (1) で 5 回目に B が勝つ確率を求めているからではありませんよ．もし (1) がなくて，いきなり (2) の問題が出たらどうしますか？　A が勝つ確率を求めますか？
　おそらく大変だと思いますよ．
直感的に考えて，A が勝つ確率と B が勝つ確率のどちらが大きいと思いますか？「表が 2 回出る」のと「裏が 4 回出る」のとでどちらの方が起こりやすいか？　そんなん明らかに表が 2 回出るほうに決まってます．ということは A が勝つ確率の方が大きいに決まってます (ちなみに A が勝つ確率が $\dfrac{13}{16}$，B が勝つ確率は $\dfrac{3}{16}$)．値が小さいほうが計算も楽なので，確率の小さい B の方を求めるのです．

$\boxed{112}$ 上の例題 22 を参照してください．目の出方は $\dfrac{7!}{3!2!2!}$ です．