第 1 章　場合の数と確率

10　条件付き確率

研究　原因の確率

そもそも確率とは

$$\frac{\text{その場合の個数}}{\text{全事象の個数}}$$

という単なる「個数の比」に過ぎません．

ここで重要になってくるのは，**全事象のイメージ**です．つまり，「全事象をどのように捉えるか」によって，結果が大きく変わってきます．『条件付き確率』とは，その全事象に条件にあるというだけのことです．

例えば，サイコロをふるとき，単に「1 の目がでる確率は？」といえば $\frac{1}{6}$ ですが，「奇数の目が出ている」と分かっていて「1 の目がでる確率は？」といえば $\frac{1}{3}$ です．『条件つき確率』とはおおよそそのようなものです．

『条件付き確率』を計算するには，次の公式が基本となります．本来は，確率は「個数の比」で求めるのですが，条件付き確率の場合は「条件のない確率の比」で求められていることを意識しましょう．

▷Point◁（条件付き確率）

事象 A が起こったときに，事象 B が起こる確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

である．

113 問題をよく読んで次のような表を作成すると分かりやすいでしょう．

	A 型	B 型	
男子	40 人	24 人	64 人
女子	13 人	23 人	36 人
	53 人	47 人	100 人

あとは，問題をよく読んで，全事象がどこの部分になるのか考えてください．

114 前問とほとんど同じ．問題をよく読んで次のような表を作成すると分かりやすいでしょう．

なお，今回は人数ではないのですが，全体を 100 人と設定して考えればよいでしょう．

	合格	不合格	
男子	40 人	？人	？人
女子	24 人	？人	？人
	64 人	36 人	100 人

あとは，問題をよく読んで，全事象がどこの部分になるのか考えてください．

115 特に何も考えずに条件付き確率の「公式」に当てはめれば解けますね．言うまでもなく「公式」とは，

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

のことです．意味を考えるまでも無く，単なる機械的な計算です．

116 今度は機械的な計算ではなく，意味を考えよう．

$P_A(B)$ を求めるからといって，いきなり公式 $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ を持ち出すのではありません．意味を考えればあたりまえです．

$P_A(B)$ とは「事象 A が起こったときに事象 B が起こる確率」，つまり「最初に白玉が出たとき，次に赤玉が出る確率」です．最初に白玉が出た後では，袋の中は白玉 7 個，赤玉 4 個になっているので，この状態で赤玉を取り出す確率を考えます．

$P_A(\overline{B})$ とは「事象 A が起こったときに事象 B が起こらない確率」，つまり「最初に白玉が出たとき，次に白玉が出る確率」です．最初に白玉が出た後では，袋の中は白玉 7 個，赤玉 4 個になっているので，この状態で白玉を取り出す確率を考えます．

$P_{\overline{A}}(\overline{B})$ とは「事象 A が起こらないときに事象 B が起こらない確率」，つまり「最初に赤玉が出たとき，次に白玉が出る確率」です．最初に赤玉が出た後では，袋の中は白玉 8 個，赤玉 3 個になっているので，この状態で赤玉を取り出す確率を考えます．

117 (1) と (3)，(2) と (4) をしっかり区別しよう．「当たりくじを引いたとき，〜」と「当たりくじを引き，〜」なんて日常会話ではほとんど区別せずに用いますが，数学的には全く異なります．この数学特有の言い回しが数学嫌いを増やすのかもね・・・・英語で書けば「引いたとき＝ when」で「引き＝ and」なんですけどね．かえって分かりにくいか？
ここでは (1) と (3) を解説します．
A が当たりを引く確率を $P(A)$，B が当たりを引く確率を $P(B)$ などとすると，
(1) は，A が当たりを引いたということがわかっているときに B が当たりを引く確率なので $P_A(B)$，
(3) は，A も B もどちらも当たりを引く確率なので $P(A\cap B)$
のことを表しています．つまり (1) が条件付き確率で (3) はフツーの確率．
(1) は $\boxed{116}$ 同様に意味を考えれば当たり前です．つまり A が当たりを引いた後では，99 本中 9 本の当たりくじになっているので，この状態で B が当たりを引く確率を考えます．ここでも公式を振り回すのではありません．
次に (3) ですが，条件付き確率の公式

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

において分母をはらってみると

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

となります．この計算式を使うんですが，まあフツーはこんなこと考えずに計算するでしょうね．

118 赤赤赤白という順番で出ればよいので，次のような式で解く人が多いでしょう．

$$\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}\times\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}\cdots(※)$$

これはこれで正しいのですが，後々のことを考えると，別の解法も学んでおいたほうが良いでしょう．
玉を全て区別して考え，合計 12 個の中から 4 個選んで並べると考えます．その並べ方の中から，「赤赤赤白」という並べ方になる確率を求めるのです．
まず，全事象は，異なる 12 個の中から 4 個選んで並べるので

$${}_{12}\mathrm{P}_4=12\times11\times10\times9\cdots①$$

赤 7 個の中から 3 個選んで並べ，次に白 5 個の中から 1 個選んで並べるから，

$${}_7\mathrm{P}_3\times{}_5\mathrm{P}_1=7\times6\times5\times5\cdots②$$

$\dfrac{②}{①}=\dfrac{7\times6\times5\times5}{12\times11\times10\times9}$ が求める確率です．結果的に最初の計算式（※）と同じですね．
この問題のように，引いた玉などを元に戻さずに引き続ける試行を非復元抽出と呼ぶのですが，まあ，呼び方はともかく，いわゆる「くじ引き型」の試行を順列で考えることはとてもよくやる手法なのです．
「くじ引きは神様の順列」という名セリフがありました．我々人間は，くじ引きを引くときは神様がすでに決めた順列に従って引いているだけ，というわけです．なかなか上手い表現だと思います．

119 古くからある有名な問題．犬プリで詳しく解説する予定です．
「赤玉が出たんだから選んだ箱は A か B．その中で，もう 1 つも赤玉が出るのは A だから，求める確率は $\frac{1}{2}$ である」というのはよくやってしまうミスです．そうではありません．ヒントは玉を全て区別して考えると言うことです．3 個の赤玉を R_1，R_2，R_3，3 個の白玉を W_1，W_2，W_3，とします．
計算で求めても構いませんが，まずは次のように考えるのが自然でしょう．
箱 A に R_1 と R_2，箱 A に R_3 と W_1，箱 A に W_2 と W_3 の玉がそれぞれ入っているとします．このとき，1 回目の 2 回目に取り出

す玉の組みあわせは,

	1 回目	2 回目
①	R_1	R_2
②	R_2	R_1
③	R_3	W_1
④	W_1	R_3
⑤	W_1	W_2
⑥	W_2	W_1

の 6 通り．ここで,「1 回目が赤玉の時」とは上の表の ①②③ の 3 通りです．この中から，2 回目も赤玉であるのは，①② の 2 通りなので，求める確率は $\dfrac{2}{3}$ になります．

$\boxed{120}$ 当たりを ◯，ハズレを × で表すことにすると，
(1) は，××◯
(2) は，◯×× または ×◯× または ××◯
計算は特に問題ないでしょう．むしろ，この問題が $\boxed{118}$ と全く同じであることを意識してほしいですね．

$\boxed{121}$ まずは $\dfrac{1}{3}$ の確率でそれぞれ箱を選びます．選んだ後は，それぞれの箱内の玉に応じて計算します．
例えば，最初に A の箱を選んだ場合は，

$$\frac{1}{3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}$$

箱 B，C の場合も同様に計算して，最後に足すだけ．

$\boxed{122}$ 「くじ引きは引く順番に関わらず当たる確率は同じ」という事実に基づけば，明らかに答えは $\dfrac{1}{53}$ ですが，むしろこの問題は，この事実が真実であることを計算で実際に確認する問題である，と位置づけ，正しく式を立てて計算して見ましょう．この問題も $\boxed{118}$ と同じですね．「くじ引きは神様の順列」なので，順列で考えるべきでしょう．

$\boxed{123}$ ここからがいよいよ「条件付き確率」の本領発揮です．
「2 本の中に当たりくじがある」という事象を A
「1 本目が当たりくじである」という事象を B
とすると，求めるのは条件付き確率 $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ です．
まず，$P(A)$ は 2 本の中に当たりくじがある確率なので，当たりを ◯，ハズレを × で表すことにすると，

◯◯ または ×◯ または ◯×

の 3 通りあります (引く順番も考慮します)．それぞれを計算して足します．なお，余事象を考えても良いでしょう．つまり，1−「2 本ともはずれる確率」を計算するのです．
$P(A\cap B)$ は「2 本の中に当たりくじがあり，1 本目があたりである確率」なので

◯◯ または ◯×

の 2 通りです．
計算は大丈夫でしょう．

$\boxed{124}$ とりあえず赤玉の個数を x 個とでもおきましょう．
「赤赤」と連続して出る確率は $\dfrac{x}{10}\times\dfrac{x-1}{9}$ で，これが $\dfrac{7}{15}$ に等しいというだけです．

$\boxed{125}$ 最初の取り出した玉が何色なのかを考える必要があります．
(1) では，最初に A から赤玉を取り出した場合，B は「赤 3 個，白 2 個」になります．最初に A から白玉を取り出した場合，B は「赤 2 個，白 3 個」になります．B から赤玉 1 個を取り出す確率が変わってきますね．
(2) も同様．最初に A から赤玉 2 個を取り出した場合，B は「赤 4 個，白 2 個」になります．最初に A から赤 1 個，白 1 個を取り出した場合，B は「赤 3 個，白 3 個」になります．最初に A から白玉 2 個を取り出した場合，B は「赤 2 個，白 4 個」になります．ここでも B から赤玉 2 個を取り出す確率が変わってきますね．
状況を落ち着いて考えれば大丈夫でしょう．
計算も特に問題ないはず．

126 2 枚のうち 1 枚がハートである事象を A，残りの 1 枚もハートである事象を B とすると，求めるのは条件付き確率 $P_A(B)$ です．

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

考え方は 123 と全く同じなので省略します．言うまでもないですが，52 枚中にスペード，ダイヤ，ハート，クラブは 13 枚ずつあります．

127 白玉を取り出す事象を W，C の袋を選ぶ事象を C とすると，求めるのは条件付き確率 $P_W(C)$ です．

$$P_W(C)=\frac{P(W\cap C)}{P(W)}$$

$P(W)$ を求める方法は 121 と同様．各袋を選ぶ確率がそれぞれ異なっていることに注意しよう．
$P(W\cap C)$ とは，結局，袋 C を選んで白玉をとる確率に過ぎません．

128 こういう問題では，問題文をよく読んで正確に表に書き表すことがポイントです．
合計 9900 個の商品の A 社，B 社，C 社の内訳が 4 : 3 : 2 なので，A 社 4400 個，B 社 3300 個，C 社 2200 個です．さらにそれぞれの不良品の割合も分かっているので，下のような表が完成します．

	良品	不良品	
A 社	4268 個	132 個	4400 個
B 社	3168 個	132 個	3300 個
C 社	2090 個	110 個	2200 個
	9526 個	374 個	9900 個

取り出した製品が不良品である事象を F
A 社から仕入れた製品である事象 A
とおくと，求めるのは条件付き確率 $P_F(A)$ です．

$$P_F(A)=\frac{P(F\cap A)}{P(F)}$$

$$P(F\cap A)=\frac{132}{9900},\qquad P(F)=\frac{374}{9900}$$

なので，代入すれば終わり．

129 条件付き確率の有名問題．大昔の早稲田大学の問題だったと思います．僕は最初にこの問題を解いたとき，「こんなん解けへんわ」と思いました。なぜなら，「忘れてきたことに気がつく確率」が書いてない！ K 君はものすごく鈍感な人で，忘れてきたことに全く気づかないかも知れません．気がつかないまま 1 年が過ぎて，翌年に年始の挨拶に行ったときに気づいたりして（笑）.
でも，こんなことを言っていては先に進まないので，次のように解釈しましょう．
「忘れてきたことに気づく」
＝「どこかに忘れてくる」
この解釈にちょっと無理があるかもしれませんが，こう解釈できれば簡単です．これまで通りに，事象を設定して立式しよう．
帽子を忘れてきたことに気がつく（つまり，どこかに忘れてくる）という事象を F,
帽子を B の家で忘れるという事象を B とすると，求めるのは条件付き確率 $P_F(B)$ です．

$$P_F(B)=\frac{P(F\cap B)}{P(F)}$$

ここで，$P(F\cap B)$ は B で忘れる確率．B で忘れるためには A では忘れてはいけないので，

$$P(F\cap B)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$

次に，$P(F)$ はどっかで忘れる確率です．つまり A または B または C で忘れる確率だから，

$$P(F)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{61}{125}$$

したがって，

$$P_F(B)=\frac{P(F\cap B)}{P(F)}=\frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}}=\frac{20}{61}$$

注 $P(F)$ は次のように求めても構いません．$P(F)$ はどっかの家に忘れる確率だから，「どこの家にも忘れない」の余事象だと考えます．つまり，

$$P(F)=1-\text{「どこにも帽子を忘れない」}$$
$$=1-\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{61}{125}$$