# 第3章　整数の性質

## 第1節　約数と倍数

### 2　最大公約数と最小公倍数

まず始めに，最大公約数と最小公倍数についてのとても重要な関係をまとめておこう．次の5つの性質は，いつでもすぐに言えるようにしておこう．

▷Point◁

$a$，$b$ の最小公倍数を $L$，最大公約数を $G$ とおくとき，次が成立する．

- 性質① $a$，$b$ の公倍数は $L$ の倍数である．
- 性質② $a$，$b$ の公約数は $G$ の約数である．
- 性質③ $a = Ga'$，$b = Gb'$ とおくとき，$a'$ と $b'$ は互いに素である．
- 性質④ $L = Ga'b'$ が成立する．
- 性質⑤ $ab = GL$ が成立する．

証明はここでは省略します (意外とムツカシイです)．犬プリ「整数問題の原則」を見といてください．

とりあえずは，「使える」ことが大切だと思います．どんどん使って慣れよう．

**227** 特にコメントする必要ないです．僕は小学生のころに習った気がします．

**228** 特にコメントする必要ないです．これも僕は小学生のころに習った気がします．

**229** それぞれの数を素因数分解すればわかるでしょう．

**230** 「互いに素」とは共通の素因数をもたない場合を言います．よって，それぞれの数を素因数分解して，ダブりがないことを確かめます．まあ，見れば何となく分かるけどね．
なお，「互いに素」と「互いに素数」とカン違いしている人を見受けます．素数は何の関係もありません．

**231** 問題文の指示通りに立式しよう．つまり，

$$a+2 \text{ が } 5 \text{ の倍数} \iff a+2=5\alpha$$

$$a+3 \text{ が } 7 \text{ の倍数} \iff a+3=7\beta$$

で，ここからどうするのか．目標は $a+17$ が 35 の倍数であることを示すこと．つまり5の倍数かつ7の倍数になっていることを示します．
でも，そもそもどっから $a+17$ が出てくるねん，って思いますね．ここが，考えどころです．例えば $a+2$ を $a+17$ にするために両辺に 15 を足してみましょう．

$$a+17=5\alpha+15=5(\alpha+3)$$

つまり，$a+17$ は5の倍数であることがわかります．もう一方の式も同様な操作をしてみてください．7の倍数になることが分かるでしょう．

**232** ここからが重要な問題です．最初に紹介した5つの性質をガンガン使っていきます．
ここでは，$\boxed{\text{性質③}}$ $\boxed{\text{性質④}}$ を使います．
まずは，最大公約数と最小公倍数から元の2数を求める問題．要するに $G$ と $L$ から $a$ と $b$ を求めよ，ということ．
(1) を例にとって説明しよう．(1) は $G=5$，$L=75$ の場合．
まず，$\boxed{\text{性質③}}$ より，$a=5a'$，$b=5b'$ とおきます．$a'$ と $b'$ は互いに素であることに注意しよう．このとき，$\boxed{\text{性質④}}$ より，$75=5a'b'$ なので，$a'b'=15$．
$a'$ と $b'$ は互いに素なので，$(a',\ b')=(1,\ 15),(3,\ 5)$ となります ($a<b$ なので $a'<b'$ です)．したがって，$a=5a'$，$b=5b'$ に代入すれば $a$，$b$ が決定します．
正しく関係式に代入すれば，機械的な計算で求められていることを意識しよう．

**233** かなり重要な問題．この章で一番入試に出そうかもしれません．しっかりと考え，理解して，解法を定着させよう．前問同様に，$\boxed{\text{性質③}}$ $\boxed{\text{性質④}}$ を使います．あまりにも大切なので全問解説します．
(1) は，$a+b=280$，$G=14$ の場合．
$a=14a'$，$b=14b'$ とおきます．$a'$ と $b'$ は互いに素．
このとき，$a+b=14(a'+b')=280$ なので，$a'+b'=20$．

$a'$ と $b'$ は互いに素なので，$(a', b') = (1, 19), (3, 17), (7, 13), (9, 11)$ となります ($a < b$ なので $a' < b'$ です)．したがって，$a = 14a'$，$b = 14b'$ に代入すれば $a$，$b$ が決定します．
(2) は，$ab = 700$，$G = 5$ の場合．
$a = 5a'$，$b = 5b'$ とおきます．$a'$ と $b'$ は互いに素．
このとき，$ab = 25a'b' = 700$ なので，$a'b' = 28$．
$a'$ と $b'$ は互いに素なので，$(a', b') = (1, 28), (4, 7)$ となります ($a < b$ なので $a' < b'$ です)．したがって，$a = 5a'$，$b = 5b'$ に代入すれば $a$，$b$ が決定します．
(3) は，$a + b = 168$，$L = 1001$ の場合．
$a = Ga'$，$b = Gb'$ とおきます．$a'$ と $b'$ は互いに素．
このとき，$a + b = G(a' + b') = 168$，
$L = Ga'b' = 1001$
なので，$G$ は 168 と 1001 の公約数．
$168 = 2^3 \times 3 \times 7$
$1001 = 7 \times 11 \times 13$
なので，$G = 7$ と決定する．したがって，
$a' + b' = 24$，　$a'b' = 143$
より，$(a', b') = (11, 13)$ となります ($a < b$ なので $a' < b'$ です)．$a'$ と $b'$ が互いに素であることも満たしています．したがって，$a = 7a'$，$b = 7b'$ に代入すれば $a$，$b$ が決定します．
(4) は，$ab = 300$，$L = 60$ の場合．
$a = Ga'$，$b = Gb'$ とおきます．$a'$ と $b'$ は互いに素．
このとき，$ab = G^2a'b' = 300$，
$L = Ga'b' = 60$
なので，$G$ は 60 と 300 の公約数かつ $G^2$ が 300 の約数．
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$
なので，$G = 5$ と決定する．したがって，
$a'b' = 12$
$a'$ と $b'$ が互いに素であることより，$(a', b') = (1, 11), (3, 4)$，となります ($a < b$ なので $a' < b'$ です)．したがって，$a = 5a'$，$b = 5b'$ に代入すれば $a$，$b$ が決定します．

$\boxed{234}$ $\boxed{232}$，$\boxed{234}$ をしっかり理解しておれば楽勝の問題です．
(1) は，$n = 6a'$，$30 = 6b'$ とおきます．$a'$ と $b'$ は互いに素．
このとき，$L = 6a'b' = 120$ なので $a'b' = 20$．$a'$ と $b'$ は互いに素なので・・・あら簡単．
(2) も同様です．

$\boxed{235}$ 3 つの場合は，ちょっと考える必要があります．
3 つの数 $a, b, c$ の最大公約数を $G$ とすると，

$$a = Ga',\ b = Gb',\ c = Gc'$$

となります．このとき，「$a'$ と $b'$ と $c'$ は互いに素」ですが，この意味は，$a'$，$b'$，$c'$ の全てに共通する因数がないことを意味しています．つまり，$a'$，$b'$，$c'$ のうち 2 つだけ取れば互いに素ではない場合もあるのです．だから，2 数の場合と同じように

$$L = G \times a' \times b' \times c'$$

とはなりません．
今回の場合，

$$\begin{aligned} 40 &= 8 \times 5 \\ 56 &= 8 \times 7 \\ n &= 8 \times n' \end{aligned}$$

なので，$n'$ は 5 や 7 を因数にもってもかまいません．

$$1400 = 8 \times 5 \times 5 \times 7$$

なので，最小公倍数 1400 をつくるには 8 が 1 個，5 が 2 個，7 が 1 個必要だから，$n'$ は最低でも 5 を 2 個もつ必要があり，さらに 7 は，もっても，もたなくてもどちらでも良いので，

$$n' = 5^2 \quad \text{または} \quad 5^2 \times 7$$

であることがわかります．

$\boxed{236}$ 上の例題 31 を参照のこと．そのまんまですね．最大公約数，最小公倍数をタイルの敷き詰め方に対応させてイメージする方法は後ほど学習する「ユークリッドの互除法」とも関連する重要な考え方です．ていうか，小学校でこう習いませんでした？

$\boxed{237}$ 小学校の問題みたいですねえ．実質的に配った個数は，みかんが 390 個，りんごが 234 個ですから，これらを子供に均等に最大個数ずつ配ったわけですから，2 つの数 390 と 234 のアレを考えればよいですね．ある意味，前問のタイルの敷詰めと同じですね．

$\boxed{238}$ 難しそうですが，落ち着いてしっかり意味を考えれば大丈夫でしょう．

(1) は，$\dfrac{n}{20}$ が自然数になるには $n$ が 20 で割り切れる，つまり $n$ が 20 の倍数であることを意味しています．したがって，$\dfrac{n}{20}$ と $\dfrac{n}{42}$ がともに自然数になるのだから，$n$ は 20 の倍数かつ 42 の倍数になります．

(2) は上の例題 32 を参照のこと．そのまんま．

(3) は，これ以上約分でいない分数を既約分数といいます．$\dfrac{35}{m}$ がこれ以上約分できないということは，$m$ が 5 の倍数でも 7 の倍数でもないことを意味しています．

$$\frac{35}{m}\times\frac{4}{7}=\frac{20}{m}=\frac{4\times5}{m}$$

$$\frac{35}{m}\div\frac{5}{8}=\frac{56}{m}=\frac{7\times8}{m}$$

がともに整数になり，かつ $m$ が 5 の倍数でも 7 の倍数でもないことを考慮すれば，$m$ がどのような数になるべきかわかるでしょう．