第３章　整数の性質

3　整数の割り算と商および余り

この単元の内容，考え方はとても重要で，整数問題を解決する上での基本となる部分です．

その基本とは

整数を割った余りで分類する

ということです．本来は整数全部について調べねばならないところを，整数をいくつかのグループに分けて，その代表だけで考えれば良いという点で，とても有効な手段なのです．

例えば，整数を 3 で割った余りで分類すれば，

$$3k,\quad 3k+1,\quad 3k+2$$

となり，整数を 5 で割った余りで分類すれば，

$$5k,\quad 5k+1,\quad 5k+2,\quad 5k+3,\quad 5k+4$$

となります．

✎注　計算の負担を軽くするために，3 で割った余りの分類を

$$3k,\quad 3k\pm1$$

5 で割った余りの分類を

$$5k,\quad 5k\pm1,\quad 5k\pm2$$

とする場合もあります．

何で割った余りで分類するのかは，状況を見て自分で判断するしかありません．

239 (1)(2) は問題ないでしょう．(3)(4) が勘違いしやすいですね．

整数は等間隔でトビトビに並んでいます．例えば，5 で割ると余りが 1 の整数も幅 5 でトビトビに並んでいます．

たいていの人は「5 で割ると余りが 1 の整数」と言われれば，下のような数をイメージすると思います．

$$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ \cdots$$

でもこれだと負の部分を忘れています．幅 5 を保ちながら負の部分を書き出してみると

$$\cdots,\ -24,\ -19,\ -14,\ -9,\ -4,\ 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \cdots$$

となります．これらの数はいずれも「5 で割ると 1 余る数」です．ですから，(3) で -24 は 5 で割ると 1 余る数だったわけです．数直線をイメージすると分かりやすいかもしれませんね．

このように数の列をイメージすれば余りを求めることはできますが，商となるとちょっと頭がこんがらがります．

商と余りは次のように定義されます．

▷Point◁(割り算の定義)

> 整数 a と正の整数 b に対して，が実数のとき
>
> $$a=bq+r\ \ (0\leqq r<b)$$
>
> を満たす整数 q と r がただ一通りに定まる．
>
> q を商，r を余り，という．

(3) の場合，

$$-24=5\times(-5)+1$$

より，商は -5，余り 1，となります．

よくやってしまうミスは，$24=5\times4+4$ のノリで

$$-24=5\times(-4)-4$$

とし，商は -4，余り -4，としてしまうもの．これは違う．

5 で割った余りは 0, 1, 2, 3, 4 のいずれかであることに注意しよう

240 $a=8k+5$，$b=8k+6$ として計算するだけ．そのうち『合同式』を習えばもっとスッキリ計算できるようになります．

241 言うまでもなく偶数は $2k$，奇数は $2k+1$ と表すことができます．

よって，(2) の連続する 2 つの偶数は，$2k$ と $2k+2$

(3) の連続する 2 つの奇数は，$2k+1$ と $2k+3$，あるいは，$2k-11$ と $2k+1$ とおけばよいでしょう．

242 整数は 3 で割った余りによって，

$$3k,\quad 3k+1,\quad 3k+2$$

と 3 つのグループに分類されます．このうち，3 の倍数でないのは $3k+1$ と $3k+2$ のグループに属する場合です．
よって，本問の場合，$n=3k+1$ のときと $n=3k+2$ のときを考え，問題文をそのまま立式するだけ．
なお，$n=3k+1$，$n=3k-1$ と考えてもかまいません．

243 n は全ての整数ですが，自分で余りでの分類を考えます．(1) の場合は偶数であることを証明なので，n を 2 で割った余りで分類する，すなわち，$n=2k$，$n=2k+1$ とすればよいでしょう．
(1) の場合は 3 の倍数でないことを証明なので，n を 2 で割った余りで分類する，すなわち，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$(または $n=3k-1$) とすればよいでしょう．
注　(1) は，次のように式変形すれば結果はほとんど明らかです．

$$n^2+5n+4=n^2+n+4n+4=n(n+1)+4(n+1)$$

244 前問同様に，自分で余りでの分類を考えます．今回は 7 で割った余りで分類する，すなわち，$n=7k$，$n=7k\pm1$，$n=7k\pm2$，$n=7k\pm3$，とすればよいでしょう．

245 $\boxed{243}$のように余りで分類しても解けますが，上の例題 34 をみれば，そうではなく式変形でやれ，ということなんでしょうね．
式変形だけ紹介するので，なぜ 6 の倍数になるのかは自分で考えてください．
(1) は例題 34 と同じ．

$$\begin{aligned}&n(n-1)(2n-1)\\=&n(n-1)(n+1+n-2)\\=&n(n-1)(n+1)+n(n-1)(n-2)\end{aligned}$$

(2) は

$$\begin{aligned}&n^3+5n\\=&n^3-n+6n\\=&n(n^2-1)+6n\\=&n(n+1)(n-1)+6n\end{aligned}$$

(3) は

$$\begin{aligned}&2n^3+4n\\=&2n^3-2n+6n\\=&2n(n^2-1)+6n\\=&2n(n+1)(n-1)+6n\end{aligned}$$

いずれも「連続 3 整数の積は 6 の倍数」という有名事実が根底にあるようですね．逆に言えば，この事実を使えるように，意図的に式変形しているのですね．

246 連続する 3 つの奇数を

$$2k-1,\quad 2k+1,\quad 2k+3$$

とでも設定すると，2 乗の和に 1 を足した数 N は

$$N=12k^2+12k+12=12(k^2+k+1)$$

となるはず．これは明らかに 12 の倍数ですね．では，さらにこれが 24 の倍数でないことを言うにはあと何を言えばよいのでしょうか．
k^2+k+1 に注目する必要がありそうです．この部分が「アレ」になればよいんですね．
$k^2+k+1=k(k+1)+1$ と変形できるので，「アレ」になることは明らかですね．
もちろん連続する 3 つの奇数を

$$2k+1,\quad 2k+3,\quad 2k+5$$

と設定してもかまいません．